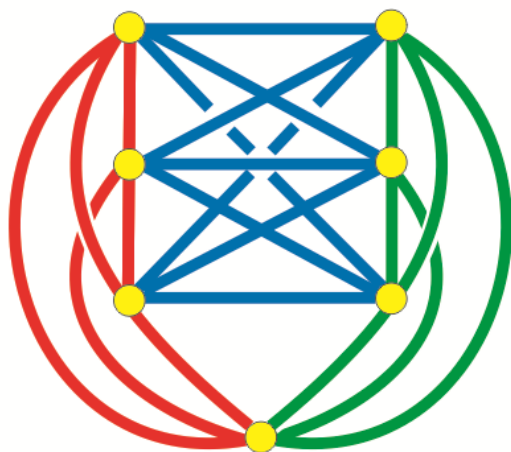


Дев'ятнадцятий Міжнародний науково-практичний семінар

*Комбінаторні конфігурації
та їх застосування*

7-8 квітня 2017 року



**Кропивницький
2017**

Міністерство освіти і науки України
Кіровоградська льотна академія
Національного авіаційного університету
Центральноукраїнський національний технічний університет
Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова
Національної академії наук України

Матеріали
Дев'ятого Міжнародного науково-практичного
семінару

**«КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ»**

7-8 квітня 2017 року

м. Кропивницький
2017 р.

Матеріали Дев'ятнадцятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» присвяченого пам'яті д.ф.-м.н., професора Петренюка Анатолія Яковича (Кропивницький, 7-8 квітня 2017 року) / За ред. Г.П. Донець – Кропивницький, 2017. – 196 с.

Засновник семінару – Державна льотна академія України

Науковий керівник семінару:

Неділько В. М., к.т.н., доцент, директор Науково-виробничого інституту аеронавігації Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Редакційна колегія:

Відповідальний редактор:

Донець Г. П. – д. ф.-м. н., професор, завідувач відділом економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Члени редколегії:

Волков Ю.І. – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету ім. Володимира Винниченка

Виврот Т. М., к.ф.-м.н., Інститут досліджень науко-технічного потенціалу та історії науки НАН України

Дмітрієв О.М. – к.т.н., завідувач кафедри льотної експлуатації, аеродинаміки та динаміки польоту Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Зайцев Е. П. – к.т.н., доцент, професор кафедри фізико-математичних дисциплін Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Кузьменко О. С. – к.п.н., доцент, доцент кафедри фізико-математичних дисциплін Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Стецюк П.І. – д.ф.-м.н., професор, завідувач відділом негладкої оптимізації Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Шендеровский В.А. – д.ф.-м.н., професор, віце-президент Українського фізичного товариства (м. Київ)

Організаційний комітет:

Голова – Обідін Д. М., д.т.н., професор, заступник начальника Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету з навчальної та наукової роботи

Відповідальний секретар – Семенюта М. Ф., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри фізико-математичних дисциплін Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Члени оргкомітету:

Бондар О.П. – к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Джума Л.М. – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Донець Г.П. – д. ф.-м. н., професор, завідувач відділом економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Дреєв О.М. – к.т.н., старший викладач кафедри програмування та захисту інформації Центральноукраїнського національного технічного університету

Козін І.В. – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри економічної кібернетики Запорізького національного університету

Мелешко Є.В. – к.т.н., доцент, доцент кафедри програмування та захисту інформації Центральноукраїнського національного технічного університету

Неділько С. М. – д.т.н., професор, начальник Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Петренюк В.І. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри програмування та захисту інформації Центральноукраїнського національного технічного університету

Сидоров М.В. – к.п.н., с.н.с., помічник начальника Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету з ЗП та ІР

Смірнов О.А. – д.т.н., професор, завідувач кафедри програмування та захисту інформації Центральноукраїнського національного технічного університету

Тимофієва Н. К. – д.т.н., старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу комплексних досліджень інформаційних технологій Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

Черноусова Ж.Т. – к.ф.-м.н., доцент кафедри математичного моделювання економічних систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

Шерман З.О. – старший викладач кафедри медичної фізика та інформаційних технологій Донецького національного медичного університету

Шульгін В.А. – к.т.н., доцент, декан факультету льотної експлуатації Кіровоградської льотної академії Національного авіаційного університету

Johanna Pirker, Foaad Khosmood, Christian Gütl <i>Graz University of Technology, Austria, California Polytechnic State University, USA Graz University of Technology, Austria</i>	
Social network analysis of the global game jam network.....	12
Бондарь О.П. <i>Кировоградская летняя академия НАУ</i>	
Матричный алгоритм изотопного преобразования квадратичных форм.....	14
Воблый В. А., Мелешко А. К. <i>МГТУ им. Н.Э.Баумана</i>	
Перечисление помеченных кактусов без треугольников	17
Волков Ю.І., Войналович Н.М. <i>Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка</i>	
Про перелічування композицій з обмеженнями на частини.....	19
Глухов О. Д. <i>Національний авіаційний університет</i>	
Про одну властивість випадкових перестановок.....	24
Гром Н.В. <i>Інститут кібернетики НАН України</i>	
Про деякі особливості задачі дробово-лінійного програмування із додатними коефіцієнтами.....	27
Джума Л.Н., Лавриненко А.С. <i>Кировоградская летняя академия НАУ</i>	
Программные средства имитационного моделирования	30
Донець Г. П. <i>Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України</i>	
Задача пошуку трьох та чотирьох активних куль серед маси подібних.....	34
Дресєв О. М., Дресєва Г.М. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i>	

Розподілене зберігання інформації на не надійних вузлах однорангової мережі.....	43
Ємець О. О., Барболіна Т. М. <i>Полтавський університет економіки і торгівлі, Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г.Короленка</i>	
Безумовна оптимізація на розміщеннях дробово-лінійної функції.....	46
Зайцев Е. П. <i>Кировоградская летная академия Национального авиационного университета</i>	
Суперпозиция основных уравнений квазистатической термоупругости.....	52
Ізвалов О. В. <i>Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету</i>	
Самоописуючі нумерації деяких графів.....	57
Іллічева Л.М. <i>Київська державна академія водного транспорту ім. П. Конашевича-Сагайдачного</i>	
Про довжину оптимального кода при алфавітному кодуванні.....	58
Исаченко А. Н., Ревякин А.М. <i>Белорусский государственный университет, Национальный исследовательский университет «МИЭТ»</i>	
Ориентируемость, планирование транспортных потоков и жесткость ферм.....	61
Кадубовський О. А. <i>ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»</i>	
Про один зі способів доведення властивості непарних чисел Каталана.....	68
Карпенко В.М. <i>Національна акціонерна компанія "Нафтогаз України"</i>	
Загальний метод кінцевих різниць.....	74

Кашель О.Є, Джума Л.М., Піліпюнок О.М. <i>Кіровоградська льотна академія НАУ</i> Обґрунтування методу інтелектуального аналізу на основі нечітких асоціативних правил у вивченні закономірностей змін метеорологічних даних та стану злітно-посадкової смуги.....	80
Козин І. В., Полюга С. І. <i>Запорожский национальный университет</i> Фрагментарная модель и эволюционный алгоритм в задачах о минимальном остовном дереве с ограничениями.....	85
Козин І. В., Батовский С. Е. <i>Запорожский национальный университет</i> Эволюционно-фрагментарная модель для задачи о максимальном разрезе на графах.....	87
Кузьменко О. С. <i>Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету</i> Використання графів для розв'язання фізичних задач....	89
Мажаров В.С. <i>Кіровоградська льотна академія НАУ</i> Проблеми математичного моделювання динаміки польоту повітряного судна.....	94
Неділько С.М., Семенюта М. Ф. <i>Кіровоградська льотна академія НАУ</i> Дистанційна антимагічна розмітка гіперкуба.....	100
Неділько В.М., Стратонов В.М. <i>Кіровоградська льотна академія НАУ</i> Графова модель процесу оптимізації маршруту евакуації постраждалих від місць тимчасового розміщення постраждалих до місць надання спеціалізованої медичної допомоги.....	103
Петренюк В. І., Петренюк Д. А. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.</i>	

Алгоритм побудови 8-ми вершинних графів-обструкції для тора.....	107
Петренюк Д. А. <i>Институт кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.</i>	
Підстави для сумнівів у граціозності усіх дерев.....	112
Романов В.А. <i>Кировоградский государственный педагогический университет</i>	
Топологии в пространствах геометрических конфигураций.....	115
Самарай В.П. <i>Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского”</i>	
Диагностика литейных дефектов.....	117
Самарай В.П. <i>Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского”</i>	
Диагностика качества уплотнения форм и стержней по дефектному состоянию отливок.....	120
Семенюта М. Ф., Шульгін В. А., Matthias Kilian <i>Кіровоградська льотна академія НАУ, Hof University of Applied Sciences</i>	
Про 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку графів певних конструкцій.....	123
Смирнов А.А., Коваленко А.В., Коваленко А.С. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i>	
Алгоритм анализа DOM XSS уязвимости при управлении рисками разработки программного обеспечения.....	125
Стецюк П.И., Савицкий В.В. <i>Институт кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Институт електросварки ім. Е.О. Патона</i>	

НАН України

О робастности метода наименьших модулей для поиска дефектов в регулярных 3D-структурах..... 127

Терешко Я. В., Козін І. В.

Запорізький Національний Університет

Використання еволюційних алгоритмів у промислових задачах з построзрахунковим критерієм оцінки на основі методу імітації відпалу..... 132

Тимофієва Н. К.

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

Про подібність задач комбінаторної оптимізації різних класів..... 137

Турчина В.А., Ключник М.І.

Дніпропетровський національний університет

ім. О. Гончара

Порівняльний аналіз наближених алгоритмів розв'язання задач паралельного упорядкування..... 141

Удовиченко А.С.

БГТУ “Военмех” ім. Д.Ф.Устинова

К проблеме применения теории графов в автоматизации проектирования и анализа сетей..... 146

Хох В.Д., Мелешко Є.В.

Центральноукраїнський національний технічний університет

Розробка типів даних для експертної системи «VINE» для аудиту інформаційної безпеки..... 147

Черноусова Ж. Т.

Національний технічний університет України

«Киевский политехнический институт

имени Игоря Сикорского»

Неопределенность в задачах принятия решений..... 150

Шевченко К. М.

Кіровоградський державний педагогічний університет

ім. В. Винниченка

Ще дещо про $\theta(H, F)$ 152

Шендеровский В. А., Лісковець С. М. <i>Інститут фізики Національної академії наук України</i> <i>Луцький національний технічний університет</i> Український математик Євген Вікторовський – засновник теорії оптимального керування.....	155
Шерман З. А. <i>Донецький національний медичинський університет</i> Квадратная разностная разметка графа подразбиений.....	158
Шингалов Д.В., Мелешко Є.В., Минайленко Р.М. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i> Методи автоматизації побудови графових структур спільнот у соціальних мережах.....	162
Шмельова Т.Ф., Сікірда Ю.В. <i>Національний авіаційний університет</i> <i>Кіровоградська льотна академія</i> <i>Національного авіаційного університету</i> Застосування методів комбінаторики для визначення оптимального складу повітряного парку авіакомпанії.....	165
Шмельова Т.Ф., Сікірда Ю.В., Яқуніна І.Л. <i>Національний авіаційний університет,</i> <i>Кіровоградська льотна академія Національного</i> <i>авіаційного університету</i> Застосування теорії нечітких множин в аеронавігаційній системі.....	171
Шмельова Т.Ф., Яқуніна І.Л. <i>Національний авіаційний університет</i> <i>Кіровоградська льотна академія НАУ</i> Визначення якісних показників виконання дій авіаційним спеціалістом за допомогою методів нечіткої логіки.....	177
Ярошевич В.А. <i>Національний дослідницький університет</i> <i>«МИЭТ»</i> Регулярность полугруппы многозначных преобразований, сохраняющих заданное бинарное отношение.....	183

Антончик М. П.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Структура графа D_4 як обструкції для тора..... 187

Демченко Д.О.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Графи-обструкції на 8-ми вершинах..... 189

Недопич Е.М.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

D_7 - 9 -ти вершинна граф-обструкція для тора..... 191

Сахарова А.В.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Структура графів D_5 і D_6 -обструкцій тора..... 193

Суржик С.А.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Граф D_8 як обструкція для тора..... 195

SOCIAL NETWORK ANALYSIS OF THE GLOBAL GAME JAM NETWORK

Johanna Pirker,

Foaad Khosmood,

Christian Gütl, assistant professor

Graz University of Technology, Austria,

California Polytechnic State University, USA

Graz University of Technology, Austria

Game jams have great potential as educational frameworks [1, 2, 3], to build local communities [4], and to strengthen connections between academia and industry [5, 6]. While the main motivation of attending game jams often differs between participants, community building and social values of such events were identified by several studies as key elements [4]. Thus, it is crucial to get a better understanding of values, interactions, and moods of the jammers in a social context.

One way to study the social connections is by representing social interactions in the form of social networks that form between game jammers. Social network analysis (SNA) can be used as a tool to get a deeper understanding of aspects such as social dynamics, community structures, or key persons. To understand better the social dynamics in jammer networks in an international context, the basis of our analysis is data from the international game jam event Global Game Jam R over several years.

The annual Global Game Jam1 (GGJ) is a key event in the context of on-site and social game jam events [7] and puts the game jam into an international setting. In comparison to several other game jam events, both local collaboration and the global setting are essential to the whole experience.

In this work, we focus on investigating the jammer in a (1) social context and look at the jam experience through a (2) global context through social network analysis. Based on previous work by [8] and [9] we get an understanding of the community based on the official Global Game Jam surveys.

To understand better the importance of social interactions, we investigate different types of connections between jammers who

have developed games together within GGJ events in the past three years. Social network analysis in the context of game jam research is a new way of modeling this community. This work only forms a first basic pass for this research and gives directions for potential research questions for further studies with SNA as main analysis tool.

We discuss ways to strengthen the community and the event structure based on our findings.

REFERENCES

[1] Allan Fowler, Foad Khosmood, Ali Arya, and Gorm Lai. 2013. The global game jam for teaching and learning. In *Proceedings of the 4th Annual Conference on Computing and Information Technology Research and Education New Zealand*. 28–34.

[2] Micah Hrehovcsik, Harald Warmelink, and Marilla Valente. 2016. The Game Jam as a Format for Formal Applied Game Design and Development Education. In *Games and Learning Alliance*. Springer, 257–267.

[3] Juergen Musil, Angelika Schweda, Dietmar Winkler, and Stefan Biffl. 2010. Synthesized essence: what game jams teach about prototyping of new software products. In *2010 ACM/IEEE 32nd International Conference on Software Engineering*, Vol. 2. IEEE, 183–186.

[4] Jon A Preston, Je. Chastine, Casey OfiDonnell, Tony Tseng, and Blair MacIntyre. 2012. Game jams: Community, motivations, and learning among jammers. *International Journal of Game-Based Learning (IJGBL)* 2, 3 (2012), 51–70.

[5] Richard Eberhardt. 2016. No OneWay to Jam: Game Jams for Creativity, Learning, Entertainment, and Research. In *Proceedings of the International Conference on Game Jams, Hackathons, and Game Creation Events*. ACM, 34–37.

[6] Johanna Pirker, Annakaisa Kultima, and Christian Gutl. 2016. The Value of Game Prototyping Projects for Students and Industry. In *Proceedings of the International Conference on Game Jams, Hackathons, and Game Creation Events*. ACM, 54–57.

[7] Allan Fowler, Foaad Khosmood, and Ali Arya. 2013. The evolution and significance of the Global Game Jam. In *Proc. of the Foundations of Digital Games Conference*, Vol. 2013.

[8] Thomas Steinke, Max Linsenbard, Elliot Fiske, and Foaad Khosmood. 2016. Understanding a Community: Observations from the Global Game Jam Survey Data. In *Proceedings of the International Conference on Game Jams, Hackathons, and Game Creation Events*. ACM, 15–21.

[9] Foaad Khosmood. 2013. Global Game Jam 2013 by the numbers. (2013). <http://2013.globalgamejam.org/news/2013/02/04/global-game-jam-2013-numbers>

МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ИЗОТОПНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Бондарь О.П., bondarkla@ukr.net

Кировоградская летняя академия НАУ

Аннотация. Указан алгоритм изотопных преобразований квадратичных форм в матричном виде

Abstract. We considered isotopic matrix transformation of quadratic forms.

Известно, что гладкую функцию на многообразии можно рассматривать, как параметр некоторой математической модели на непрерывном множестве. Изучению взаимосвязи топологии многообразия с помощью заданной на нем функции посвящено много работ. Например, изотопии многообразия со свойствами заданных на нем функций связывал В.В.Шарко [1], рассматривая так называемые изотопные функции Морса, обобщением которых являются непрерывно или гладко изотопные функции [2].

При этом координатное представление изотопии давалось в виде конечного диффеоморфизма изотопии, то есть замены координат прообраза функции. А поскольку в процессе изучения функций на многообразиях важны перестройки функций, то есть гомотопии, связывающие функции, то

представляет интерес координатное представление изотопий функций с указанием процесса замены.

Поэтому важно уметь находить подобное представление, и одним из инструментов его поиска является описанный в докладе матричный алгоритм изотопного преобразования квадратичных форм.

Известно, что квадратичную форму от n переменных

$$L = X A X^T,$$

где вектор переменных $X=(x^1 \dots x^n)$ и матрица квадратичной формы $A = [a^{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$,

не вырождена, можно привести к каноническому виду

$$(y^1)^2 + \dots + (y^\lambda)^2 - (y^{\lambda+1})^2 - \dots - (y^n)^2$$

с помощью невырожденного линейного преобразования этих переменных. Несложно показать, что это преобразование изотопно некоторому стандартному преобразованию.

Укажем алгоритм линейного преобразования в матричном виде.

Первый шаг. Приводим квадратичную форму к виду, в котором $a^{11} \neq 0$. Если это было не так, то находим диагональный элемент $a^{ii} \neq 0$ и меняем местами в матрице A первую строку с i -той и первый столбец с i -тым. Если же все диагональные элементы матрицы A нулевые, то линейной заменой переменных

$$x^1 = (1/2)(u^1 + u^2), \quad x^2 = (1/a^{12})(u^1 - u^2),$$

изотопной стандартному преобразованию, приводим квадратичную форму к виду

$$L = X (B')^T (X')^T, \quad \text{где } X' = (u^1 \ u^2 \ x^3 \ \dots \ x^n),$$

готовому для следующего шага.

Второй шаг. Полагая $a^{11} \neq 0$, и обозначив $\text{sign } a^{11} = s^{11}$, получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{|a^{11}|} & s^{11} \frac{a^{12}}{\sqrt{|a^{11}|}} & \dots & s^{11} \frac{a^{1n}}{\sqrt{|a^{11}|}} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n1} & a^{n2} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix},$$

умножив элементы первой строки на $s^{11} \frac{1}{\sqrt{|a^{11}|}}$. Применяя стандартное линейное преобразование, обнуляющее элементы первого столбца, стоящие ниже первого, получим матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} \sqrt{|a^{11}|} & s^{11} \frac{a^{12}}{\sqrt{|a^{11}|}} & \dots & s^{11} \frac{a^{1n}}{\sqrt{|a^{11}|}} \\ 0 & a^{22} - \frac{(a^{12})^2}{a^{11}} & \dots & a^{2n} - \frac{a^{12}a^{1n}}{a^{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a^{n2} - \frac{a^{12}a^{1n}}{a^{11}} & \dots & a^{nn} - \frac{(a^{1n})^2}{a^{11}} \end{pmatrix},$$

которая превращает квадратичную форму

$$L' = X (B')^T (X')^T, \text{ где}$$

$$X' = (u^1 \ x^2 \ \dots \ x^n) \text{ и}$$

$$u^1 = s^{11} (\sqrt{|a^{11}|} x^1 + s^{11} \frac{a^{12}}{\sqrt{|a^{11}|}} x^2 + \dots + s^{11} \frac{a^{1n}}{\sqrt{|a^{11}|}} x^n),$$

в квадратичную форму вида

$$L' = X (B')^T (X')^T = \text{sign } a^{11} (u^1)^2 + Y C Y^T,$$

в которой

$$C = \begin{pmatrix} a^{22} - \frac{(a^{12})^2}{a^{11}} & \dots & a^{2n} - \frac{a^{12}a^{1n}}{a^{11}} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{n2} - \frac{a^{12}a^{1n}}{a^{11}} & \dots & a^{nn} - \frac{(a^{1n})^2}{a^{11}} \end{pmatrix}$$

и $Y = (x^2 \ \dots \ x^n)$.

Третий и последующие шаги. Выполняем предыдущие шаги по отношению к матрице C , а затем – к получаемым в результате этих шагов следующим матрицам до тех пор, пока квадратичная форма не будет приведена к каноническому виду.

Литература

1. В.В.Шарко. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – Киев: Наук. думка, 1990.- 196 с.
2. О.П.Бондарь. Об определении изотопных функций. – Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі - 2015», (2015), С.67.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ КАКТУСОВ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Воблый В. А., Мелешко А. К.

vitvobl@yandex.ru, akmeleshko@gmail.com

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Аннотация. Получена точная формула для числа помеченных кактусов без треугольников.

Abstract. The exact formula was derived for the number of labeled cacti without triangles.

Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле [1, с. 93]. Все блоки кактуса – ребра или простые циклы. Форд и Уленбек перечислили помеченные кактусы с заданным распределением числа вершин по многоугольникам [2]. В [4] получена явная формула для числа помеченных кактусов с заданным числом вершин, не содержащая суммирования по всем разбиениям целого числа. В [3] перечислены помеченные эйлеровы кактусы с заданным числом вершин. Графы без треугольников являются важным классом графов. По теореме Грёцша каждый планарный граф без треугольников 3-раскрываем.

Теорема. Пусть CT_n – число помеченных кактусов без треугольников с n вершинами.

При $n \geq 3$ верна формула

$$CT_n = n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \sum_{k=0}^{n-3r-1} \binom{n-k-2r-2}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r}.$$

Доказательство. Пусть C_n – число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n – число помеченных блоков с n вершинами. Введем производящую функцию: $B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$.

В работе [4] автором было получено соотношение

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n},$$

где $[z^{-1}]$ – оператор формального вычета [5, с. 25].

Обозначая через $\bar{B}(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных кактусов без треугольников, получим

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(n\bar{B}(z)) z^{-n}.$$

Так как число помеченных циклов с n вершинами равно $(n-1)!/2$, имеем

$$B'(z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad \bar{B}'(z) = z + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} z^n = z + \frac{1}{2} \left(\frac{z^3}{(1-z)} \right).$$

Следовательно,

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nz) \exp\left(\frac{nz^3}{2(1-z)}\right) z^{-n}.$$

Разлагая экспоненту в степенной ряд, найдем

$$CT_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k z^k}{k!} \left(z^{-n} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n^r z^{3r-n}}{r! 2^r (1-z)^r} \right).$$

Используя известный ряд [6]

$$(1-z)^{-r} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1} z^m,$$

имеем

$$\begin{aligned} CT_n &= n^{n-2} + (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+r-1}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r} z^{k+3r-n+m} = \\ &= n^{n-2} + (n-1)! \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k-2r-2}{r-1} \frac{n^{k+r-1}}{k! r! 2^r}. \end{aligned}$$

Учитывая, что биномиальный коэффициент обращается в нуль при $n-k-2r-2 < r-1$, получим утверждение теоремы.

Литература

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир.-1977. - с. 324.
2. Ford G.W., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs, III. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. - 1956. - Vol. 42. - P. 529-535.

3. Воблый В.А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов. // Материалы XI Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”. М. МГУ. - 2012. - С. 529-535.

4. Воблый В. А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов. // Дискретный анализ и исследование операций. - 2012. - Т. 19. - № 4. - С. 48-59.

5. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука. - 1990. - с. 504.

6. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука. - 1982. - с. 256.

ПРО ПЕРЕЛІЧУВАННЯ КОМПОЗИЦІЙ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ЧАСТИНИ

Волков Ю.І., Войналович Н.М.

yulysenko@i.ua

*Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка*

Анотація. Отримані явні формули для кількості композицій натурального числа n , кожна частина якого дорівнює “1” або “ s ” ($s > 1$), і числа n , кожна частина якого більша “ $s - 1$ ”.

Abstract. We get the formulas for the quantity of compositions of number n with each part equals “1” or “ s ” ($s > 1$), and of number n each part more “ $s - 1$ ”

В комбінаториці композиціями називають подання натуральних чисел у вигляді сум натуральних чисел з урахуванням порядку доданків у таких сумах. Задачі, які пов’язані з композиціями, це задачі на підрахунок їх кількості з тими чи іншими обмеженнями на частини. Основним апаратом для розв’язування таких задач являються генератриси (див., наприклад, [1]).

Метою даної роботи є отримання явних формул для кількості композицій:

1) числа n тільки з частинами “1” або “ s ” ($s > 1$) (число таких композицій позначатимемо символом $c_n(1, s)$);

2) числа n з частнами, які більші, або дорівнюють “ s ” (число таких композицій позначатимемо символом $c_n(s)$).

Лема 1. Числа $c_n(1, s)$ задовольняють рекурентному співвідношенню:

$$c_{n+s}(1, s) = c_{n+s-1}(1, s) + c_n(1, s), c_0 = c_1 = \dots = c_{s-1} = 1$$

Доведення. Генератрисою послідовності чисел $\{c_n(1, s)\}$ буде функція

$$\sum_{m=1}^{\infty} (z + z^s)^m = \frac{1}{1 - z - z^s} - 1 = \frac{z + z^s}{1 - z - z^s}.$$

Далі, функція $\frac{1}{1 - z - z^s}$ є генератрисою послідовності чисел $\{F_n^{(s-1)}\}$, які задовольняють рекурентності

$$F_n^{(s-1)} = F_{n-1}^{(s-1)} + F_{n-s}^{(s-1)}, F_0^{(s-1)} = F_1^{(s-1)} = \dots = F_{s-1}^{(s-1)} = 1$$

Звідси випливає, що функція $\frac{z}{1 - z - z^s}$ є генератриса послідовності $\{F_{n-1}^{(s-1)}\}$, а функція $\frac{z^s}{1 - z - z^s}$ є генератриса послідовності $\{F_{n-s}^{(s-1)}\}$. Отже, функція $\frac{z + z^s}{1 - z - z^s}$ буде генератрисою послідовності $\{F_{n-1}^{(s-1)} + F_{n-s}^{(s-1)} = F_n^{(s-1)}\}$ і, отже, $F_n^{(s-1)} = c_n(1, s)$.

Числа $F_n^{(s)}$ називатимемо s -числами Фібоначчі. Зокрема, $c_n(1, 2) = F_n^{(1)}$ — звичайні числа Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Лема 2. $c_n(s) = F_{n-s}^{(s-1)} = c_{n-s}(1, s)$.

Доведення. Генератрисою послідовності чисел $\{C_n(s)\}$ буде функція

$$\sum_{m=1}^{\infty} (z^s + z^{s+1} + z^{s+2} + \dots)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{z^s}{1-z} \right)^m =$$

$$1 / \left(1 - \frac{z^s}{1-z} \right) - 1 = \frac{z + z^s}{1-z-z^s},$$

а це генератриса послідовності $F_{n-s}^{(s-1)}$.

Теорема. *Має місце співвідношення:*

$$F_n^{(r)} = C_n^0 + C_{n-r}^1 + C_{n-2r}^2 + C_{n-3r}^3 + \dots$$

Доведення. Позначимо через y_n суму

$$C_n^0 + C_{n-r}^1 + C_{n-2r}^2 + C_{n-3r}^3 + \dots.$$

Тоді

$$y_{n+r} = C_{n+r}^0 + C_n^1 + C_{n-r}^2 + C_{n-2r}^3 + \dots,$$

а звідси

$$y_{n+r} + y_n =$$

$$C_{n+r}^0 + C_n^1 + C_{n-r}^2 + C_{n-2r}^3 + \dots + C_n^0 + C_{n-r}^1 + C_{n-2r}^2 + C_{n-3r}^3 + \dots =$$

$$C_{n+r+1}^0 + (C_n^0 + C_n^1) + (C_{n-r}^2 + C_{n-r}^1) + (C_{n-2r}^3 + C_{n-2r}^2) + \dots =$$

$$C_{n+r+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n-r+1}^2 + C_{n-2r+1}^3 + \dots = y_{n+r+1}$$

(Тут використана основна рекурентність для біноміальних коефіцієнтів: $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$). Отже, числа y_n задовольняють такому ж рекурентному рівнянню, як і числа $F_n^{(r)}$. Залишилось перевірити початкові умови: $y_0 = y_1 = \dots = y_{r-1} = 1$, а це очевидно. Звідси випливає рівність: $y_n = F_n^{(r)}$.

Наслідок 1.

$$c_n(1, s) = C_n^0 + C_{n-s-1}^1 + C_{n-2s-2}^2 + C_{n-3s-3}^3 + \dots$$

Таблицю чисел $c_n(1, s)$ наведено в статті [2].

Наслідок 2.

$$c_n(s) = C_{n-s}^0 + C_{n-2s+1}^1 + C_{n-3s+2}^2 + C_{n-4s+3}^3 + \dots$$

Покажемо **2**-числа Фібоначчі на трикутнику Паскаля, який зобразимо так (біноміальні коефіцієнти розташовано на діагоналях, які всі паралельні діагоналі **1 4 6 4 1**).

	1			1			1			1			<u>1</u>	
		1		2			3			<u>4</u>				5
			1		3			<u>6</u>		10			10	
				1		<u>4</u>			10			20		
					<u>1</u>		5			15				35
						1		6			21			
							1		7			28		
								1		8				36
									1		9			
										1		10		
											1			11
												1		
													1	
														1
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Σ	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	59	88

Сума чисел у стовпчику це **2**-число Фібоначчі (номер стовпця це номер **2**-числа Фібоначчі).

У вигляді формули ця властивість біноміальних коефіцієнтів записується так ,

$$F_n^{(2)} = C_n^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-4}^2 + C_{n-6}^3 + \dots$$

Випишемо ще одну формулу для **2**-чисел Фібоначчі, яка є аналогом формули Біне для звичайних чисел Фібоначчі $F_n^{(1)}$:

$$F_n^{(1)} = ((1 + \sqrt{5})/2)^{n+1} - (1 - \sqrt{5})/2)^{n+1}) / \sqrt{5}$$

Для цього розв'яжемо рівняння $z^3 - z^2 - 1 = 0$. Це рівняння має один дійсний корінь $\lambda \approx 1.46556$ і два комплексно спряжені $\alpha \pm i\beta$. Позначимо через $\rho \approx 0.826030$ модуль цього числа, а через $\varphi \approx -1.85647$ –аргумент. Тоді , як це впливає з

теорії лінійних однорідних рекурентних рівнянь з постійними коефіцієнтами,

$F_n^{(2)} = C_1 \lambda^n + \rho^n (C_2 \cos n\varphi + C_3 \sin n\varphi)$, де коефіцієнти C_1, C_2, C_3 будуть розв'язками системи

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 \lambda + \rho(C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi) = 1 \\ C_1 \lambda^2 + \rho^2(C_2 \cos 2\varphi + C_3 \sin 2\varphi) = 1 \end{cases}$$

Звідси $C_1 \approx 0.611497\dots$, $C_2 \approx 0.388502\dots$, $C_3 \approx -0.245092\dots$

Оскільки $\rho < 1$, $F_n^{(2)}$ дорівнює найближчому цілому до числа $(1.465712\dots)^n \times 0.611497\dots$

Покажемо **3**-числа Фібоначчі на трикутнику Паскаля, який зобразимо так (біноміальні коефіцієнти розташовано на діагоналях, які всі паралельні діагоналі **1 4 6 4**)..

	1			1			1			1			1	
		1			2				3					4
			1			3				6				
				1			4				10			
					1			5				15		
						1			6				21	
							1			7				
								1			8			
									1			9		
										1			10	
											1			
												1		
													1	
														1
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Σ	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36

Сума чисел у стовпчику це **3**-число Фібоначчі (номер стовп-ця це номер **3**-числа Фібоначчі).

У вигляді формули ця властивість біноміальних коефіцієнтів записується так ,

$$F_n^{(3)} = C_n^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-6}^2 + C_{n-9}^3 + \dots .$$

Аналогічно до попереднього, використовуючи корені рівняння , $z^4 - z^3 - 1 = 0$, отримаємо: $F_n^{(3)}$ дорівнює найближчому цілому до числа $(1.38027\dots)^n \times 0.547494\dots$

Література

1. Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ – М.: ИЛ, 1983, 288 с.
2. Волков Ю.І. Стохастичне тлумачення композицій з обмеженнями на частини. // Сьомий Міжвузиський науково-практичний семінар “Комбінаторні конфігурації та їх застосування “.Матеріали семінару, 17-18 квітня 2009 р., м. Кіровоград,—2009– с.21–25.

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ВИПАДКОВИХ ПЕРЕСТАНОВОК

Глухов О.Д., glukhov07@gmail.com,
Національній авіаційний університет

Аннотация. Розглянто одну властивість випадкових перестановок та показано можливість її застосування в теорії графів.

Abstract. One property of random permutations is considered and its application in graph theory and graph is shown.

Означення 1. Нехай $f : X \rightarrow X$ - ін'єктивне відображення множини X , $A \subset X$ – деяка її підмножина. f будемо називати диз'юнктним відображенням множини A , якщо $f(A) \cap A = \emptyset$.

Наступні дві теореми доводять існування диз'юнктних відображень при певних обмеженнях на число елементів підмножини A даної множини U у випадку коли відображення задано дією групи на цій множині .

Теорема 1. Якщо група Γ діє транзитивно на множині U , $|U|=n$, $A \subset U$, $|A|=k$, а g - випадковий елемент групи Γ , то $\text{Prob}(g(A) \cap A = \emptyset) \geq 1 - k^2/n$.

Наслідок. Якщо група Γ транзитивно діє на множині U , $|U|=n$, $A \subset U$, $|A|=o(\sqrt{n})$, а g - випадковий елемент Γ , то $\text{Prob}(g(A) \cap A = \emptyset) = 1 - o(1)$.

Теорема 2. Якщо група Γ діє на множині U , $|U|=n$, $U = \sum_{k=1}^s U_k$, де $\{U_k\}_{k=1}^s$ - множина орбіт цієї групи, $A \subset U$, $|A|=k$, а g - випадковий елемент групи Γ , то

$$\text{Prob}(g(A) \cap A = \emptyset) \geq 1 - \sum_{k=1}^s |A \cap U_k|^2 / |U_k|.$$

Далі буде показано, як ці теореми можна застосувати в деяких задачах теорії графів, зокрема, наприклад, для побудови збільшувачів, які містять даний підграф.

Нагадаємо, що граф $G_n, |G_n^0|=n$, називається збільшувачем, якщо для будь-якого $A \subset G_n^0, |A| \leq n/2$, справедлива нерівність $\rho(A, G_n) \geq \alpha |A|$, де $\alpha > 0$ - деяка константа [1, 2].

Означення 2 [3]. Нехай F, J - два графи, $F^0 \cap J^0 = \emptyset$, $|F^0|=|J^0|=n$ і нехай $\varphi: F^0 \rightarrow J^0$ - деяка бієкція. Позначимо через $G = F \langle \varphi \rangle J$ граф, який одержується з графу $F + J$ ототожненням кожної вершини $a \in F^0$ з вершиною $\varphi(a) \in J^0$. Граф G будемо називати перестановочною склейкою графів F і J .

Якщо позначити $\tau_1: F \rightarrow G, \tau_2: J \rightarrow G$ - ін'єктивні вложення графів, то відображення $\varphi^* = \tau_1^{-1} \varphi \tau_2$ буде перестановкою на множині G^0 вершин графа G .

Розглянемо – довільний зв'язний граф H_n , де

$H_n^0 = V_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Множини U і A визначимо наступним

$$\text{чином: } U = \{X : X \subset V_n, |X| \leq n/2\},$$

$$A = \{X : X \in U, \rho(X, H_n) < \alpha |X|\}.$$

Нехай тепер на множині V_n діє (транзитивно) симетрична група S_n . Тоді група S_n також діє і на множині U за правилом:

$$g \in S_n, X \in U \Rightarrow g(X) = \{g(x) : x \in X\}.$$

При цьому орбітами будуть очевидно множини U_k , де $U_k = \{X : X \in U, |X| = k\}$, $k = 1, 2, \dots, s$, $s = \lfloor n/2 \rfloor$.

Візьмемо тепер два графи F і J ізоморфних графу H_n і розглянемо граф $G = H\langle\varphi\rangle J$. Очевидно, якщо перестановка φ буде диз'юнктним відображенням множини A , то граф G буде збільшувачем.

Лема 1. Якщо H_n – довільний зв'язний граф, то при достатньо малому $\alpha > 0$ має місце нерівність:

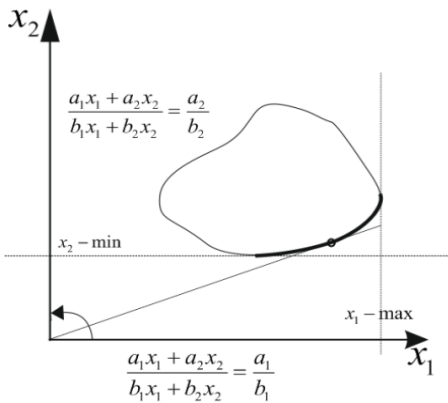
$$|A \cap U_k|^2 / |U_k| < (ck/n)^{1-2\alpha}, \text{ де } 0 < c < 2.$$

Лема 2. Якщо $0 < c < 2$, $\theta > 0$, то має місце оцінка

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (ck/n)^{\theta k} = o(1).$$

Теорема 3. Склейка $G = H\langle\varphi\rangle J$ двох ізоморфних зв'язних графів по випадковій перестановці буде збільшувачем (при достатньо малому $\alpha > 0$) з ймовірністю $1 - o(1)$.

Доведення одразу випливає з теореми 2 та



лем 1 і 2.

Зауважимо, що існує ефективний спосіб перевірки, чи даний граф, зокрема отриманий граф $G = H \langle \varphi \rangle J$ дійсно буде збільшувачем [1,2].

Література

1. Diestel R. Graph Theory.- Springer-Verlag, New York , 2000. -322p.
2. Hoory S., Linial N., Wigderson A. Expander graphs and their applications. Bulletin of the American Mathematical Society. V. 43. N4. 2006. P. 439-561.
3. Глухов О.Д. Про застосування груп перестановок в деяких комбінаторних задачах.- Укр. мат. журнал, т.60, №11, 2008, с.1568-1571.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ІЗ ДОДАТНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Гром Н.В.

hrom.nv@gmail.com

Інститут кібернетики НАН України

Abstract. In paper some features of the linear-fractional programming are discussed, and a genetic approach is outlined for solving it.

Key words: linear-fractional programming, genetic approach.

Анотація. У доповіді наводяться деякі особливості задачі дробово-лінійного програмування та окреслено генетичний підхід для її розв'язку.

Ключові слова: дробово-лінійне програмування, генетичний підхід.

Багато інженерних або економічних оптимізаційних задач можна звести до задачі дробово-лінійного програмування, наприклад, оптимізувати відношення витрати/час, витрати/прибуток тощо. На сьогодні існує кілька різних методів розв'язання таких задач [1,2,3,4]. У цій доповіді ми обмежимося одним специфічним видом задачі, коли кожен коефіцієнт при змінних є додатним, що переважно зустрічається на практиці.

Постановка задачі. Знайти

$$\text{extr} \frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{bx}} \quad (1)$$

при умові

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_n}{b_n}, \quad (2)$$

де $\mathbf{a}(a_1; \dots; a_n)$, $\mathbf{b}(b_1; \dots; b_n)$ – вектори, координати яких є додатними, $\mathbf{x}(x_1; \dots; x_n)$ – вектор з невід'ємними координатами.

Нескладно довести, що функція (1) змінюється неперервно

у межах $\left[\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_n}{b_n} \right]$ (для $\forall \mathbf{x}: \frac{a_1}{b_1} - \frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{bx}} > 0$ і $\frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{bx}} - \frac{a_n}{b_n} > 0$). Таким

чином, для досягнення мінімуму ($\min \frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{bx}} = \frac{a_1}{b_1}$) необхідно, всі,

крім першої, змінні, прирівняти до нуля. Аналогічно, для

досягнення максимуму ($\max \frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{bx}} = \frac{a_n}{b_n}$) слід прирівняти до нуля

всі змінні, окрім x_n .

У реальних задачах на змінні накладаються економічні чи технічні обмеження. Таким чином, у випадку знаходження мінімуму функції (1) оптимальна точка буде розташована серед "близьких" до точки $(x_1^{\max}; 0; \dots; 0)$, де x_1^{\max} – найбільш можливе значення змінної x_1 при заданих обмеженнях (рис. 1).

Для пошуку оптимальної точки доцільно використовувати генетичний підхід. Перша хромосома створюється так: змінній x_n надається якнайменше значення із усіх можливих, тоді мінімізується змінна x_{n-1} і т.д. по порядку, а останній – x_1 надається максимально можливе значення. Для створення наступної хромосоми слід дещо збільшити значення x_2 за рахунок зниження x_1 . Всі наступні хромосоми створюються за тією ж логікою: дещо збільшується значення гену x_i за

рахунок зменшення x_j ($i > j$). Далі оцінюється придатність кожної хромосоми з популяції, відбираються найкращі, застосовується мутація (схрещування робити недоцільно), створюється наступна популяція і т.д. до виконання критерію зупинки алгоритму.

Якщо необхідно знайти максимум функції (1), то першу хромосому створюється так: змінній x_1 надається якнайменше значення, послідовно мінімізується всі наступні змінні, а останній – x_n присвоюється найбільше значення при даних умовах. Для створення наступних хромосом дещо збільшується значення гену x_i за рахунок зменшення x_j (однак, на відміну від першого випадку, $i < j$). Всі наступні операції аналогічні до першого випадку.

Якщо задача поставлена наступним чином: знайти $\text{extr} \frac{\mathbf{ax}}{\mathbf{bx}}$
при умові

$$\frac{a_1}{b_1} < \dots < \frac{a_i}{b_i} \leq \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} < \dots < \frac{a_n}{b_n}, \quad (3)$$

то це означає, що на значення функції (1) впливає лише загальна сума $(x_i + x_{i+1})$, незалежно від конкретного значення x_i чи x_{i+1} .

Висновки. Якщо всі коефіцієнти дробово-лінійної функції (1) є додатними, а на змінні накладено умову невід'ємності, то значення цієї функції змінюється у межах $\left[\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_n}{b_n} \right]$, де a_1, a_n, b_1, b_n – коефіцієнти, для яких виконується умова (2). Для знаходження оптимуму в конкретній задачі доцільно використовувати генетичний підхід.

Література

1. Charnes, A. and Cooper, W.W. (1962) Programming with Linear Fractional Functions. Naval Research Logistics Quarterly, 9, 181-186.

2. Swarup, K., Gupta, P.K. and Mohan, M. (2003) Tracts in Operation Research. 11th Edition.

3. Hasan, M.B. and Acharjee, S. (2011) Solving LFP by Converting It into a Single LP. International Journal of Operations Research, 8, 1-14.

4. Енциклопедія кібернетики в 2 т. / За ред. В. М. Глушкова. — Київ: Головна редакція Української радянської енциклопедії, 1973

ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Джума Л.Н., Лавриненко А.С.
nptaha@list.ru, lavrykkot@gmail.com,
Кировоградская летняя академия НАУ

Аннотация. В тезисах приведен сравнительный анализ существующих программных средств, предназначенных для имитационного моделирования и их классификация. Представлено также обоснование выбора программного средства для реализации эталонной модели субъекта обучения интеллектуальной обучающей системы «Диспетчер Tower» и оценки ее эффективности.

Abstract. The theses represent a comparative analysis of existing simulation software tools and their classification. Foundation of software choice for the student reference model realization and the reasoning about efficiency of “ATC Tower” intelligence tutoring system are also represented.

История развития имитационного моделирования (ИМ) насчитывает уже более 50 лет. Однако только в последнее десятилетие в связи с появлением объектно-ориентированных визуальных инструментальных средств и высокопроизводительных персональных компьютеров ИМ постепенно становится повседневым инструментом для разработчиков самых различных проектов - транспортных, промышленных, медицинских, военных и т.п.[1].

Суть имитационного моделирования заключается в описании компонентов реальной системы, которые имеют определенный логико-математический характер, и

представляет собой совокупность алгоритмов, которые имитируют функционирование этой системы. Программа модели, построенная на основе этих алгоритмов, позволяет свести имитационное моделирование к проведению экспериментов на персональном компьютере путем их "прогона" на некотором множестве входных данных, имитирующих первичные события, происходящие в системе. Информация, которая фиксируется в процессе исследования имитационной модели, позволяет определить нужные показатели, характеризующие эффективность системы, которую исследуют [2].

На данный момент существует большое количество программных средств для реализации имитационного моделирования. Данные средства позволяют ускорить и автоматизировать процесс создания модели за счет наличия уже готовых компонентов, из которых строится модель, адаптированного для пользователя графического интерфейса, а также позволяют проводить эксперименты с моделью, полученной в ходе работы.

Программные средства имитационного моделирования, которые используются для разработки имитационных моделей производственных систем, можно разделить на следующие четыре группы [3]:

1. Программирование компьютерной модели с помощью универсальных языков программирования (например, C++, Delphi, Pascal). Динамику системы описывают уравнениями, которые кодируют в программу, затем проводят расчет уравнений и устанавливают связь выходных величин с входными.

2. Программирование компьютерной модели с применением специализированных языков моделирования (например, GPSS, AnyLogic), написанных на универсальных языках. Динамика системы отображается взаимодействием элементов модели во времени и пространстве. Специализированные языки имитационного моделирования компактны и имеют широкий круг приложений, однако требуют специальной подготовки пользователя, который

должен написать программу в терминах языка для конкретного объекта моделирования.

3. Построение компьютерных моделей и проведение имитационных экспериментов при помощи специализированных компьютерных сред (например, Arena, AnyLogic, GPSS World, VisSim). Имитационные среды не требуют программирования в виде последовательности команд. Вместо написания программы пользователи составляют модель из библиотечных графических модулей, и/или заполняют специальные формы.

4. Включение средств имитационного моделирования в стандартные математические компьютерные системы (например, пакет Simulink системы Matlab, Mathcad, Mathematica). Это программные среды, предназначенные для выполнения разнообразных математических и технических расчетов, предоставляющие пользователю инструменты для работы с формулами, числами, графиками, текстом, включают в себя средства для управления переменными, вводом и выводом данных, а также снабжены графическим интерфейсом.

Как было сказано ранее, количество и разнообразие компьютерных средств, которые могут быть использованы для моделирования различных систем велико. В Таблице 1 представлен сравнительный анализ таких программных средств как SIMUL8 Professional, AnyLogic, Rend Model Designer (RMD) [4,5,6].

Для реализации имитационного моделирования эталонной модели субъекта обучения интеллектуальной обучающей системы «Диспетчер Tower», разработка которой ведется на кафедре информационных технологий Кировоградской летной академии НАУ, нами была выбрана программная среда RMD. Выбор основан на том, что исследуемая нами система, а именно работа диспетчера аэродромной диспетчерской вышки (АДВ) представляет собой открытую сложную непрерывно-дискретную стохастическую динамическую систему управления со смешанной структурой. В то же время программная среда RMD обладает необходимыми для моделирования таких систем спецификациями:

1. Данная среда позволяет разрабатывать непрерывно-дискретные модели.

2. Поддерживаются стохастические модели.

3. Поддерживается объектно-ориентированный подход к моделированию.

4. Поддерживаются все виды связей между компонентами, в частности ненаправленные связи, что позволяет применять известные и интуитивно понятные методы моделирования физических систем, основанные на соединении готовых компонентов.

5. Имеются средства отладки моделей и демонстрации результатов модельных экспериментов, двухмерная и трехмерная анимация.

6. Возможность создания исполняемого кода моделей для встраивания в независимые внешние приложения с использованием API (application programming interface).

На данный момент ведется работа над реализацией полученной нами эталонной модели в программной среде RMD. Полученная программная реализация модели будет подвержена необходимому количеству экспериментов-прогонов для определения показателей, которые позволят оценить ее эффективность.

Литература

1. Имитационное моделирование экономических процессов: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 080500.62 «Бизнес-информатика» / авт.-сост. Е.П. Бочаров, О.Н. Алексенцева / Саратовский социально-экономический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «РЭУ им. Г.В. Плеханова». – Саратов, 2014. – 160 с.

2. Жерновий Ю. В. Імітаційне моделювання систем масового обслуговування: Практикум. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 307 с.

3. Бигдан, В.Б. Становление и развитие имитационного моделирования на Украине / В.Б. Бигдан, В.В. Гусев, Т.П. Марьянович, М.А. Сахнюк // <http://www.gpss.ru/immod'03/011.html>.

4. Top 20 Simulation Softwear 2017 – Compere Reviews – Capterra. [Електронний ресурс]. – Режим доступа: www.capterra.com/simulation-software/

5. AnyLogic. Многоподходное имитационное моделирование. [Електронний ресурс]. – Режим доступа: www.anylogic.ru

Rand Model Designer – среда моделирования сложных систем – MvStadium. [Електронний ресурс]. – Режим доступа: www.mvstadium.com

ЗАДАЧА ПОШУКУ ТРЬОХ ТА ЧОТИРЬОХ АКТИВНИХ КУЛЬ СЕРЕД МАСИ ПОДІБНИХ

Донець Г.П.
g_donets@mail.ru.

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Анотація. Досліджена загальна функція пошуку для трьох та чотирьох радіоактивних куль серед множини подібних. Одержані результати для деяких значень кількості елементів

Abstract.. General search function for finding three and four radioactive balls among a set of similar ones has been studied. Specific results for some initial values of the total amount of balls have been obtained.

Вступ. Ця задача з'явилася вперше в 1966 році на Московській математичній олімпіаді у двох варіантах.

Варіант 1. З 19 більярдних куль дві радіоактивні. Про будь-який набір куль за одну перевірку можна довідатися чи є в ньому хоча б одна радіоактивна (але не можна довідатися скільки їх). Довести, що за 8 перевірок можна виявити радіоактивну пару куль.

Варіант 2. В умовах задачі варіанта 1 довести, що дві радіоактивні кулі серед 11 можна знайти за 7 перевірок.

Ці задачі так і не були розв'язані. Розглянемо більш конкретну задачу. Нехай задано n більярдних куль, серед яких дві кулі радіоактивні (далі активні). Необхідно їх виявити за мінімальне число перевірок.

Очевидно, що така задача може виникнути в різних практичних напрямках. І в тих ситуаціях, де кожна перевірка пов'язана з істотними матеріальними втратами, така задача є важливою й актуальною.

Сформулюємо загальні принципи, які застосовуються при розв'язуванні подібних задач [1-5].

1. Якщо з 2^s куль радіоактивна одна, то її можна знайти за s перевірок: на першому кроком перевірити половину куль, потім методом дихотомії перевірити ту множину куль, де знаходиться активна куля.

2. Якщо куль більше, ніж 2^s , то за s кроків не можна забезпечити відшукання однієї активної кулі. Припустимо протилежне. Зробимо s випробувань, відзначаючи наявність радіоактивності плюсом, а її відсутність – мінусом. За припущенням, знаючи послідовність знаків, що виникає при перевірці, ми можемо сказати, яка з куль активна. Але різних послідовностей довжини s із двох знаків існує всього лише 2^s . Вказавши у кожній із них активну кулю, отримаємо нелогічний висновок про те, що ті кулі, яким не відповідає ніяка послідовність знаків, не можуть бути активними.

3. Якщо з n куль активні 2, то є $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ варіантів різних активних пар. Тому, якщо $\frac{n(n-1)}{2} > 2^s$, то за s випробувань не вдасться знайти активну пару.

4. Якщо з n куль першим кроком випробуємо k куль, то результат випробуванню « \leftarrow » відповідає C_{n-k}^2 варіантів (обидві активні кулі перебувають серед $n-k$, що залишилися), а результат « \rightarrow » – іншим $C_n^2 - C_{n-k}^2$ варіантам. Якщо в розпорядженні залишилося тільки i випробувань, то обов'язково повинне бути $C_{n-k}^2 \leq 2^i$ і $C_n^2 - C_{n-k}^2 \leq 2^i$.

5. Якщо за s перевірок удалося знайти розв'язок для n куль, то для меншої кількості куль можна знайти розв'язок також за s

перевірок. Це впливає з тих міркувань, що той же результат можна досягти, якщо доповнити множину куль до числа n фіктивними (неактивними) кулями. Це означає, що для двох однакових значень s і різних значень n для всіх проміжних значень кількості куль задача розв'язується за ті ж s перевірок.

Задача пошуку трьох та чотирьох активних куль значно складніша від подібної задачі для двох куль, але для свого розв'язання вона повністю використовує досягнення останньої. По аналогії з нею введемо необхідні позначення:

$f_3(n)$, $f_4(n)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед n заданих.

$h_3(k^+, n-k)$, $h_4(k^+, n-k)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед n заданих після того, як перевірка k куль дала позитивний результат.

$r_3(k^+, l^+, n-k-l)$, $r_4(k^+, l^+, n-k-l)$ – мінімальна кількість спроб для виявлення відповідно трьох і чотирьох активних куль серед n заданих після того, як перевірка послідовно k , потім l куль дала позитивний результат.

Якщо з n куль активні 3, то є $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ варіантів різних активних трійок. Тому, якщо $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} > 2^s$, то за s випробувань не вдасться знайти активну трійку.

Якщо з n куль на першому кроці випробовуємо k куль, то результат

випробування «-» відповідає C_{n-k}^3 варіантів (три активні кулі перебувають серед $n-k$, що залишилися), а результат «+» – іншим $C_n^3 - C_{n-k}^3$ варіантам.

Якщо в розпорядженні залишилося тільки i випробувань, то обов'язково повинно бути $C_{n-k}^3 \leq 2^i$ і $C_n^3 - C_{n-k}^3 \leq 2^i$.

Для обчислення функцій $f_3(n)$ та $f_4(n)$ найкращою стратегією, як показав досвід, є індуктивний метод, коли

загальна задача з даною кількістю активних куль зводиться до задачі з меншою кількістю куль.

Обчислення функції $f_3(n)$

Безпосередньо переконаємося, що $f_3(n) = n - 1$ для $4 \leq n \leq 9$.

Очевидно, що $h_3(2^+, k) = 1 + f_2(k + 1)$. Тому для $f_3(10)$ беремо та робимо перше випробування двох куль $\langle 2 \rangle$. Якщо отримаємо результат « \rightarrow », то тоді маємо $f_3(8) = 7$, а якщо результат випробування буде « \leftarrow », то тоді отримаємо $h_3(2^+, 8) = 1 + f_2(9) = 7$. В обох випадках маємо $f_3(10) = 8$.

Для 11 куль недостатньо 8 випробувань, та дуже легко довести, що $f_3(11) = 9$. Для цього беремо одну кулю. Якщо отримаємо результат випробування буде « \rightarrow », то $f_3(10) = 8$, а якщо результат буде « \leftarrow », то (див. вище) $f_2(10) = 6$. Сумуючи обидва випадки, маємо $f_3(11) = 9$.

Досить легко показати, що три активні кулі з 12-и можна знайти за 9 випробувань, тобто довести, що $f_3(12) = 9$. Для цього на першому кроці візьмемо 2 кулі. Якщо отримаємо результат « \rightarrow », то $f_3(10) = 8$, а якщо буде « \leftarrow », то справедлива рівність $h_3(2^+, 10) = 1 + f_2(11) = 1 + 7 = 8$. В підсумку отримаємо рівність $f_3(12) = 9$.

Для 13 куль на першому кроці для перевірки беремо 3 кулі. Якщо отримаємо результат « \rightarrow », то тоді $f_3(10) = 8$, а в сумі отримаємо 9 випробувань.

Якщо на першому кроці отримаємо результат « \leftarrow », то приходимо до функції $h_3(3^+, 10)$. Доведемо, що $h_3(3^+, 10) = 8$. Для цього на другому кроці беремо наступні 4 кулі. Якщо результат перевірки буде « \leftarrow », то за третій та четвертий кроки серед них знайдемо одну активну кулю, що приведе до функції $h_3(3^+, 9)$. А це означає, що за 5 кроків можна знайти всі активні кулі ($h_3(3^+, 9) = 5$).

Якщо на другому кроці отримаємо результат « \rightarrow », то тоді приходимо до функції $h_3(3^+, 6)$. У цьому випадку на третьому кроці беремо для перевірки 2 кулі з 6-и. Якщо отримаємо результат « \leftarrow », то тоді на четвертому кроці знайдемо хоча би

одну серед них активну і прийдемо до функції $h_3(3^+, 5)$, а як відомо, $h_3(3^+, 5) = 5$.

Якщо отримаємо результат «-», то приходимо до функції $h_3(3^+, 4)$, яку можна прирівняти до функції $f_3(7)$, що, як відомо, $f_3(7) = 6$. В усіх розглянутих випадках отримаємо, що $f_3(13) = 9$.

Для 14 куль вже 9 випробувань не достатньо. Доведемо, що $f_3(14) = 10$.

Для цього беремо для перевірки одну кулю. Якщо отримаємо результат «-», то тоді $f_3(13) = 9$, а якщо результат буде «+», то тоді дві активні кулі серед 13-и легко знаходяться за $f_2(13) = 7$ випробувань.

Сумуючи обидва випадки, маємо результат $f_3(14) = 10$.

Досить легко отримати результат знаходження 3-х активних куль серед 15-и заданих і показати, що $f_3(15) = 10$.

Для цього візьмемо для перевірки 2 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «-», то тоді $f_3(13) = 9$, а якщо отримаємо результат «+», то тоді справедливе співвідношення $h_3(2^+, 13) = 1 + f_2(14) = 8$. В підсумку маємо, що 3 активні кулі серед 15-и можна знайти за 10 кроків, тобто $f_3(15) = 10$.

Для 16 куль на першому кроці для перевірки беремо 3 кулі. Якщо отримаємо результат «-», то $f_3(13) = 9$, а якщо результат буде «+», то тоді на другому кроці беремо наступні 4 кулі. Якщо результат буде «+», то за третій та четвертий кроки знаходимо серед них одну активну, що приведе до функції $h_3(2^+, 13)$, а, як відомо, $h_3(2^+, 13) = 6$.

Якщо результат другого кроку буде «-», то тоді приходимо до функції $h_3(3^+, 9)$, яка покривається функцією $h_3(3^+, 10)$ і, як було показано раніше, $h_3(3^+, 10) = 8$. В усіх варіантах отримуємо, що $f_3(16) = 10$.

Для 17 куль 10 випробувань вже недостатньо. Легко довести, що для 17-и куль $f_3(17) = 11$. Для цього, знову ж таки, беремо одну кулю. Якщо отримаємо результат «-», то тоді (див. вище) $f_3(16) = 10$, а якщо результат буде «+», то тоді 2

активні кулі з 16 отримаємо за $f_2(16) = 8$ випробовувань. В обох випадках в сумі отримаємо, що $f_3(17) = 11$.

Досить легко отримати число випробовувань для знаходження 3-х активних куль серед 18-и та показати, що $f_3(18) = 11$. Для цього на першому кроці для перевірки візьмемо 2 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «-», то тоді 3 активні кулі знайдемо за $f_3(16) = 10$ випробовувань, а якщо отримаємо результат перевірки «+», то справедливе співвідношення $h_3(2^+, 16) = 1 + f_2(17) = 9$. В підсумку отримаємо, що $f_3(18) = 11$.

Покажемо, що і серед 19-и куль 3 активні можна знайти за 11 випробовувань, тобто, що $f_3(19) = 11$. Для цього на першому кроці беремо 3 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «-», то тоді $f_3(16) = 10$, і в сумі отримаємо 11 перевірок.

А якщо результат перевірки на першому кроці буде «+», то приходимо до функції $h_3(3^+, 16)$. Доведемо, що $h_3(3^+, 16) = 10$. Для цього на другому кроці беремо наступні 4 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «+», то за третій та четвертий кроки знаходимо серед них хоча би одну активну, що приводить до функції $h(3^+, 15)$. Дві інші активні кулі отримаємо за $h(3^+, 15) = 6$ перевірок. А в сумі отримаємо 10 перевірок.

Якщо на другому кроці отримаємо результат «-», то тоді приходимо до функції $h_3(3^+, 12)$. Далі поступаємо наступним чином.

На третьому кроці беремо для перевірки 4 кулі з 12-ти. Якщо отримаємо результат «+», то на четвертому та п'ятому кроках знаходимо одну з них активну. Дві інші активні кулі отримаємо за $h(3^+, 11) = 6$ перевірок. А в сумі отримаємо 10 перевірок.

Якщо на третьому кроці отримаємо результат «-», то приходимо до функції $h_3(3^+, 8)$, яка покривається функцією $h_3(3^+, 10)$ і, як було показано раніше, $h_3(3^+, 10) = 8$. В усіх розглянутих випадках отримаємо $f_3(19) = 11$.

Покажемо, що і серед 20-и куль 3 активні можна знайти за 11 випробовувань, тобто, що $f_3(20) = 11$.

Для цього на першому кроці з 20-и беремо для випробовування 4 кулі. Якщо отримаємо результат перевірки «-», то три активні кулі можна отримати за $f_3(16) = 10$ перевірок. Якщо результат перевірки 4-х куль буде «+», то тоді на другому кроці беремо 7 наступних куль. Якщо отримаємо результат перевірки «-», то три активні кулі можна отримати за $f_3(13) = 9$ перевірок. Якщо результат перевірки буде «+», то за третій і четвертий кроки отримаємо з 4-ох куль одну активну і прийдемо до функції $h(7^+, 12)$. В такому разі дві інші активні кулі отримаємо за $h(7^+, 12) = 7$ перевірок. А в сумі отримаємо 11 перевірок, тобто це означає, що $f_3(20) = 11$.

Таким же чином можна встановити, що $f_3(20+k) = 12$ для $1 \leq k \leq 4$. Це досягається наступним шляхом. На першому кроці перевіряємо k куль. Якщо отримаємо результат перевірки «-», то тоді $f_3(20) = 11$, а якщо результат буде «+», то за другий і третій кроки отримаємо з k куль одну активну і з решти дві активних кулі отримаємо за $f_2(20+k-1) \leq 9$ кроків, що і приводить до шуканого результату.

Легко показати, що $f_3(25) = 12$. Для цього на першому кроці беремо 5 куль. Якщо отримаємо результат перевірки «-», то тоді $f_3(20) = 11$, а якщо результат буде «+», то на другому кроці беремо для перевірки 8 наступних куль. Якщо результат перевірки буде «+», то за третій, четвертий і п'ятий кроки знаходимо серед них одну активну кулю. Така ситуація приводить до функції $h(5^+, 19)$. А це означає, що дві інші активні кулі можна знайти за $h(5^+, 19) = 7$ кроків.

Якщо результат перевірки отримаємо «-», то тоді приходимо до функції $h(5^+, 12)$. У цьому випадку на третьому кроці беремо для перевірки одну кулю з п'яти. Якщо отримаємо результат «+», то дві активні кулі знайдемо за 8 кроків з решти 16-и. А якщо результат перевірки однієї кулі з 5-и отримаємо «-», то за четвертий і п'ятий кроки знаходимо

серед чотирьох одну активну, а дві інші активні кулі можна знайти серед 15-и (12+3) останніх за $f_2(15) = 7$ випробовувань.

Обчислення функції $f_4(n)$

Для чотирьох куль застосуємо ті ж самі прийоми. Безпосередньо переконуємося, що $f_4(n) = n - 1$ для $5 \leq n \leq 12$. Очевидно, що по аналогії

$h_4(2^+, k) = 1 + f_3(k+1)$. Тому для $f_4(13)$ здійснюємо перше випробування, взявши для перевірки 2 кулі, тобто здійснюємо $\langle 2 \rangle$. Якщо результат перевірки отримаємо « \leftarrow », то тоді $f_4(11) = 9$, а якщо результат перевірки отримаємо « \rightarrow », то тоді $h_4(2^+, 11) = 1 + f_3(12) = 10$.

В обох випадках маємо, що $f_4(13) = 11$.

Для 14 куль не вистачає 11 випробувань, а 12 достатньо. Це легко отримати, якщо для перевірки на першому кроці взяти одну кулю. Якщо отримаємо результат перевірки « \leftarrow », то тоді $f_4(13) = 11$, а якщо буде « \rightarrow », то $f_3(13) = 9$, що і дає бажаний результат.

Для 15 куль також справедливо $f_4(15) = 12$, що доводиться наступним шляхом. Будемо відмічати відповідну функцію нижнім індексом, що дорівнює кількості кроків, що залишилися. Розглянемо функцію після першого кроку $h_4(3^+, 12)_{11}$. Це означає, що на першому кроці для перевірки беремо 3 кулі. Якщо результат « \leftarrow », то відомо $h_4(12) = 11$.

Якщо результат перевірки 3-х куль « \rightarrow », то на другому кроці беремо дві наступні кулі з 3-х та перевіряємо їх. Якщо отримаємо результат « \rightarrow », то на наступному кроці знаходимо серед них одну активну, що приведе до функції

$h_3(3^+, 11)_9$, що після визначення другої активної кулі серед трьох приведе до функції $f_2(13)$, а це означає, що дві активні кулі серед 13-и можна визначити за $f_2(13) = 7$ кроків, що і було потрібно.

Якщо результат перевірки 2-х куль буде « \leftarrow », то прийдемо до функції $h_4(3^+, 10)_{10}$. Знову повторюємо прийом з двома наступними кулями, який далі будемо називати ескалацією, що завжди приводить до двох результатів. При позитивному

результаті прийдемо до функції $h_3(3^+,9)_8 \leq h_3(3^+,10)_8 = 8$, як було доведено раніше. При негативному результаті прийдемо до функції $h_4(3^+,8)_9$. Знову робимо ескалацію. Приходимо до функцій $h_4(3^+,6)_8$, яка обчислюється безпосередньо, та $h_3(3^+,7)_7$, до якої знову застосовуємо прийом ескалації. В результаті приходимо до функцій $f_2(3^+,6)_5 = 5$ та $h_3(3^+,5)_6$. Знову застосовуємо прийом ескалації.

В двох випадках отримуємо функції $h_3(3^+,3)_5$, яка обчислюється безпосередньо, та $f_2(3^+,4)_4 = 4$, що і завершує доведення.

Для 16 куль уже необхідно 13 випробувань, хоча кількість варіантів $m = C_{16}^4 = 1820$ що значно менше ніж 2^{13} . Далі при збільшенні кількості куль цей розрив ще збільшується. Поняття прийому ескалації можна розширити, при цьому можна вибрати 2^l куль.

Будемо говорити, що функція $h_r(k^+,n)_s$ піддається ескалації на 2^l куль, в результаті якої приходимо до двох функцій $h_{r-1}(k^+,n-1)_{s-l-1}$ та $h_r(k^+,n-2^l)_{s-1}$. Як приклад розглянемо функцію $f_3(25)$. На першому кроці беремо 5 куль. Отримуємо $h_3(5^+,20)_{11}$. Робимо ескалацію на 8 куль. Приходимо до функцій $h(5^+,19)_7 = 7$ та $h_3(5^+,12)_{10}$. Останню функцію піддаємо ескалації на 4 кулі. Отримуємо $h(5^+,11)_7 = 7$ та $h_3(5^+,8)_9$, яка $\leq f_3(13) = 9$, що і було потрібно довести.

Вчасно застосовуючи метод ескалації, можна отримувати наступні результати $f_4(16) = f_4(17) = f_4(18) = 13$.

Література

1. Білецький В.І., Донець Г.П., Ненахов Е.І. Комбінаторне розпізнавання. Задачі та їх розв'язування // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, 2012. – С.21–29.

2. Донець Г.А., Кузнецов С.Т. Об одной комбинаторной задаче логического типа // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, 2012. – С.101–108.

3. Донец Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Графовый подход к решению задачи поиска радиоактивных шаров // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, 2014.– С.147–15

4. Донец Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Оптимальный поиск двух актив-ных шаров на множестве заданных // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, 2015.– С.134–139.

5. Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Алгоритмы поиска двух активных шаров на заданных множествах // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, 2016.– С.78–85.

РОЗПОДІЛЕНЕ ЗБЕРІГАННЯ ІНФОРМАЦІЇ НА НЕ НАДІЙНИХ ВУЗЛАХ ОДНОРАНГОВОЇ МЕРЕЖІ

Дреєв О.М., Дреєва Г.М.

drey.sanya@gmail.com, gannadreeva@gmail.com,

Центральноукраїнський національний технічний університет

Аннотация. Рассмотрена одноранговая сеть с ненадёжными узлами для распределённого хранения информации, при котором повышение вероятности доступа к информации обеспечивает дублирование данных. Также, обеспечение защищённости информации произведено разбиением файлов на части, которые содержат только часть ключа для восстановления оригинала. В работе получено соотношение между вероятностями утери информации, её компрометации и количеством копий и степени фрагментирования исходных файлов.

Abstract. A peer-to-peer network with unreliable nodes for distributed information storage is considered, in which the increase in the probability of access to information ensures duplication of data. Also, the security of information is produced by splitting the files into parts that contain only a part of the key for restoring the original. In the paper, a relationship is obtained between the probabilities of loss of information, its compromise and the number of copies and the degree of fragmentation of the source files.

В сучасних системах зберігання інформації часто використовують хмарні технології. Хмарні сховища передбачають розподілене зберігання файлів на серверах

підвищеної надійності. Та в організаціях при обмежених можливостях зберігання конфіденційної інформації, використовують в якості серверів менш надійні рішення, тому є актуальною задача створення систем розподіленого зберігання інформації з використанням ненадійних вузлів.

Нехай використовується однорангова мережа з N вузлів, де ймовірність втрати або компрометації окремого вузла є p . Також, файли в системі зберігаються у шифрованому вигляді розбиті на n частин, де кожна частина містить фрагмент ключа для розшифрування: тобто, для отримання доступу до інформації потрібно мати всі частини файлу на одному вузлі, така ситуація є можливою, бо розподіл проводиться за принципом випадкового вибору вузла для зберігання. З метою підвищення ймовірності доступу до інформації проводиться дублювання інформації на різних серверах; це можна реалізувати, бо вузол має можливість порівняти наявні частини та перемістити дублікати на інші вузли. Кількість копій позначимо як k .

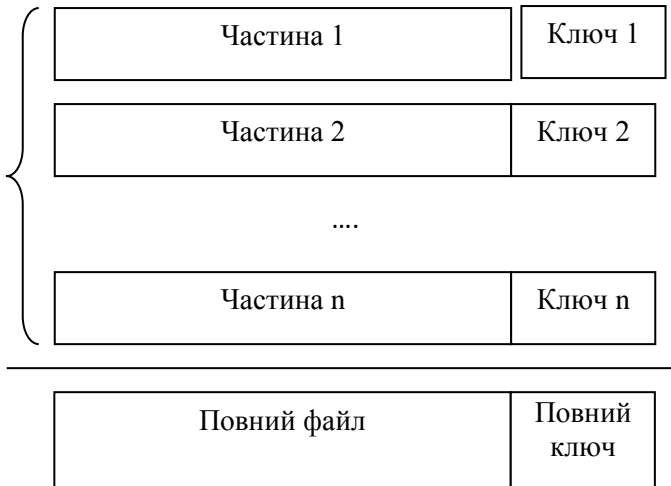


Рис. 1. Принцип розподілення файлу по вузлам

При дотриманні такого принципу, ймовірність отримання на одному з вузлів всіх частин файлу q , що при захопленні вузла зловмисником, призведе до компрометації інформації буде:

$$q = \left(\frac{1}{N - k + 1} \right)^n. \quad (1)$$

Також проведено оцінювання ймовірності втрати інформації. Втратити інформацію можна, якщо буде втрачено зв'язок з вузлами і при цьому не буде доступу хоча б до одного екземпляру частини файлу. Тому можна оцінити ймовірність цілісності системи, коли втрат інформації немає. По факту, якщо в мережі на різних вузлах міститься n копій інформації, тоді гарантується цілісність цієї інформації, коли втрачено зв'язок з мене ніж $n-1$ вузлами. Ймовірність події, при якій інформацію гарантовано не втрачено r можна знайти за виразом:

$$r = \sum_{i=1}^{n-1} C_N^i p^i (1-p)^{N-i}. \quad (2)$$

В результаті, за співвідношеннями (1) та (2) можна визначити імовірнісні оцінки надійності системи розподіленого збереження даних. Завдяки цьому ставиться для заданих $q < q_{\text{задане}}, r > r_{\text{задане}}$ оптимізаційна задача:

$$\begin{cases} n \rightarrow \min \\ k \rightarrow \min \end{cases}, \quad (3)$$

де p та N є характеристиками конкретної мережі.

Виконання умов (3) забезпечує максимальну місткість системи зберігання інформації з умовою виконання вимог безпеки інформації за критеріями надійності та конфіденційності. Система нерівностей є нелінійною і розв'язується чисельними методами.

Література

1. А.П. Доренский А.А. Смирнов, А.В. Коваленко, Н.Н. Якименко// Проблемы анализа и оценки рисков информационной деятельности/ Збірник наукових праць "Системи обробки інформації" Випуск 3(140). Х.: ХУПС. С. 40-42.

2. О.М. Дреєв, Г.М. Дреєва Визначення оптимальної кратності резервування інформації в однорангових мережах з ненадійними вузлами// Дреєв О.М., Дреєва Г.М./ Актуальні задачі та досягнення у галузі кібербезпеки : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., м. Кропивницький, 23–25 листоп. 2016 р. С. 101-102.

3. А.А. Смирнов, В.В. Босько, Е.В. Мелешко Анализ и сравнительное исследование перспективных направлений развития цифровых и телекоммуникационных систем и сетей// Смирнов А.А., Босько В.В., Мелешко Е.В./ Системи обробки інформації, т. 7, №74, Харків: ХУПС. 2008, с. 120-123.

БЕЗУМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ НА РОЗМІЩЕННЯХ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

Ємець О.О., Барболіна Т.М.
yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

*Полтавський університет економіки і торгівлі
Полтавський національний педагогічний університет
імені В.Г. Короленка*

Аннотация. В докладе рассматривается решение безусловных задач комбинаторной оптимизации дробно-линейной функции на размещениях и, в частности, на перестановках. Предложен полиномиальный метод решения таких задач, в основе которого лежит решение конечной последовательности линейных оптимизационных задач на размещениях (перестановках) без дополнительных (некомбинаторных) ограничений. Для решения линейной задачи используется критерий экстремали. Получены теоретические оценки временной сложности соответствующего алгоритма. Для оптимизационных задач на перестановках показаны пути повышения эффективности рассмотренного подхода.

Abstract. The report deals with solving of unconstrained combinatorial problems of optimization of linear fractional function on arrangements in particular on permutations. We propose the polynomial method of solving of such problems. This method is based on solving of finite sequence of linear optimization problems on arrangements (permutations) without additional (not combinatorial) constraints. The extremal criterion is used to solve of linear problem. Theoretical estimates of the time complexity of the corresponding

algorithm are obtained. For optimization problems on permutations, ways of increasing the efficiency of the approach considered are shown.

Вивчення оптимізаційних задач з обмеженнями комбінаторного характеру є актуальним напрямком теорії оптимізації. Дана доповідь посвячена одному з важливих класів таких задач — задач оптимізації дробово-лінійної функції на розміщеннях без додаткових (некомбінаторних) обмежень.

Розглядається задача знаходження пари $\langle \Phi(x^*), x^* \rangle$ такої, що

$$\Phi(x^*) = \min_{x \in E_\eta^k(G)} \Phi(x), \quad x^* = \arg \min_{x \in E_\eta^k(G)} \Phi(x), \quad (1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$, $c_j, d_j \in R^1 \quad \forall j \in J_k^0$ (тут і далі

$$J_r^s = \{s, s+1, \dots, r\}), \quad \Phi(x) = \frac{\sum_{j=1}^k c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^k d_j x_j + d_0}, \quad E_\eta^k(G) - \text{загальна}$$

множина розміщень [1, 2] з елементів мультимножини $G = \{g_1, \dots, g_k\}$. Вважатимемо, що $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$ і $\forall x \in E_\eta^k(G)$

$$\sum_{j=1}^k d_j x_j + d_0 > 0.$$

Для розв'язування задачі (1) може використовуватися аналітичний метод, запропонований у [2], проте теоретичні оцінки ефективності цього методу не одержані.

Разом із задачею (1) розглянемо задачу мінімізації на множині $E_\eta^k(G)$ функції $\varphi(x, h) = \sum_{j=1}^k x_j \bar{c}_j(h)$, де $\bar{c}_j(h) = c_j - h d_j$,

при певному значенні h : знайти пару $\langle \varphi(x^*, h), x^* \rangle$ таку, що

$$\varphi(x^*, h) = \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^k x_j \bar{c}_j(h), \quad x^* = \arg \min_{x \in E_\eta^k(G)} \sum_{j=1}^k x_j \bar{c}_j(h). \quad (2)$$

Показано, що пара $\langle \Phi^*, x^* \rangle$ є розв'язком задачі (1) тоді і лише тоді, коли $\langle \Phi^* d_0 - c_0, x^* \rangle$ задовольняє (2) при $h = \Phi^*$.

Якщо елементи мультимножини G упорядковані за неспаданням $g_1 \leq \dots \leq g_k$, а коефіцієнти функції $\varphi(x, h)$ при певному h задовольняють умову

$$\bar{c}_{q_1}(h) \geq \bar{c}_{q_2}(h) \geq \dots \geq \bar{c}_{q_k}(h), \quad (3)$$

то, як випливає з [1], одна з мінімалей функції $\varphi(x, h)$ на множині $E_\eta^k(G)$ задовольняє умови

$$x_j^* = g_j \quad \forall j \in J_p^1 \quad x_j^* = g_{\eta-k+j} \quad \forall j \in J_k^{p+1}. \quad (4)$$

Проте при іншому значенні h упорядкування коефіцієнтів може змінитися, точка (4) не буде мінімаллю в задачі (2). З'ясовано, що коли $|h| < M$, нерівність $\bar{c}_i(h) \geq \bar{c}_j(h)$ виконується якщо і лише якщо $h \leq \alpha(i, j)$, де

$$\alpha(i, j) = \begin{cases} \frac{c_i - c_j}{d_i - d_j}, & \text{якщо } d_i \neq d_j; \\ M, & \text{якщо } d_i = d_j, c_i \geq c_j; \\ -M, & \text{якщо } d_i = d_j, c_i < c_j. \end{cases} \quad (5)$$

Упорядкуємо величини (5) за неспаданням:

$$\alpha(i_1, j_1) = \dots = \alpha(i_{r-1}, j_{r-1}) = -M < \alpha(i_r, j_r) \leq \dots \leq \alpha(i_s, j_s) < M = \\ = \alpha(i_{s+1}, j_{s+1}) = \dots = \alpha(i_m, j_m),$$

де $m = \frac{k(k-1)}{2}$. Позначимо $I(t) = \{h | \alpha(i_t, j_t) < h \leq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})\}$

для всіх $t \in J_{s-1}^r$, $I(r-1) = \{h | h \leq \alpha(i_r, j_r)\}$,

$I(s) = \{h | h > \alpha(i_s, j_s)\}$. Тоді $\forall h \in I(t)$, де $t \in J_s^{r-1}$, коефіцієнти функції $\varphi(x, h)$ задовольняють умови

$$\bar{c}_{i_\tau}(h) < \bar{c}_{j_\tau}(h) \quad \forall \tau \in J_t^1, \quad \bar{c}_{i_\tau}(h) \geq \bar{c}_{j_\tau}(h) \quad \forall \tau \in J_m^{t+1}. \quad (6)$$

Умова (6) визначає упорядкування коефіцієнтів функції $\varphi(x, h)$, тобто існує такий набір індексів, що для всіх $h \in I(t)$ виконується умова (4). Для визначення цих індексів можна обчислити значення коефіцієнтів функції $\varphi(x, h)$ для деякого $h \in I(t)$, $h \neq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. У цьому випадку $\bar{c}_i(h) = \bar{c}_j(h)$ тоді і лише тоді, коли ця рівність має місце при будь-якому h .

Якщо виконується умова (3), то для визначення мінімалі в розв'язку задачі (2), як видно з (4), достатньо знати кількість додатних серед коефіцієнтів $\bar{c}_l(h)$. Нехай $p \in J_k$, точка x^* задовольняє умову (2), де $h \in I(t)$. Обчислимо $h^* = \Phi(x^*)$. Якщо також $h^* \in I(t)$, причому серед чисел $c_l - h^* d_l$ ($l \in J_k$) є p додатних, то x^* — також мінімаль функції $\varphi(x, a^*)$ на множині $E_n^k(G)$. А тоді $\langle h^*, x^* \rangle$ є розв'язком задачі (1).

Зазначимо, що деякі з коефіцієнтів $\bar{c}_l(h)$ можуть бути додатними (від'ємними) при всіх $h \in I(t)$, що дає можливість зменшити кількість «підозрілих» на мінімаль точок. Оскільки для довільного $l \in J_k$ $\bar{c}_l(h) = c_l - h d_l \geq c_l - \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) d_l$, то при $c_l > \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) d_l$ маємо $\bar{c}_l(h) > 0 \quad \forall h \in I(t)$. Якщо v — найбільший індекс такий, що $c_{q_v} > \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) d_{q_v}$, то $\bar{c}_{q_\tau}(h) > 0 \quad \forall \tau \in J_v, \quad \forall h \in I(t)$. Якщо таких індексів не існує (тобто $c_{q_v} \leq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) d_{q_v} \quad \forall v \in J_k$), то немає коефіцієнтів, які були б додатними для всіх $h \in I(t)$. У цьому випадку покладаємо $v = 0$. Аналогічно, якщо w — найменший індекс такий, що $c_{q_{w+1}} \leq \alpha(i_t, j_t) d_{q_{w+1}}$, то $\bar{c}_{q_\tau}(h) \leq 0 \quad \forall \tau \in J_k^{w+1} \quad \forall h \in I(t)$ (якщо таких індексів не існує, то покладаємо $w = k$). Таким чином, додатних серед коефіцієнтів функції $\varphi(x, h)$ для довільних $h \in I(t)$ не менше v і не більше w .

Для перевірки, чи є точка x^* , сформована згідно з (4), мінімаллю в розв'язку задачі (1), обчислимо значення цільової функції у точці x^* і перевіримо знак чисел $\bar{c}_{q_p}(\Phi(x^*))$ і $\bar{c}_{q_{p+1}}(\Phi(x^*))$ ($c_0 = M$, $c_{k+1} = -M$, $d_0 = d_{k+1} = 0$, тобто $\bar{c}_0(h) = M$, $\bar{c}_{k+1}(h) = -M$ для довільних h): якщо $\Phi(x^*) \in I(t)$, $\bar{c}_{q_p}(\Phi(x^*)) > 0$ і $\bar{c}_{q_{p+1}}(\Phi(x^*)) \leq 0$, то x^* — мінімаль у розв'язку задачі (1).

Якщо для жодного $p \in J_w^v$ мінімаль функції $\Phi(x)$ на множині $E_{\eta}^k(G)$ не буде знайдена, то перейдемо до розгляду наступного значення t . При цьому якщо $\alpha(i_{t+f}, j_{t+f}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$, то $I(t+f-1) = \emptyset$. Тому наступне значення t покладемо рівним попередньому, збільшеному на f , де f — найбільше число, для якого $\alpha(i_{t+f}, j_{t+f}) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Оскільки $\bigcup_{t \in J_s^{r-1}} I(t) = R^1$, то для деяких значень t і p буде знайдено мінімаль у задачі (1).

Доведено, що алгоритм, який ґрунтується на викладених вище міркуваннях, є поліноміальним, причому його часова складність $O(k^4)$.

Для задач на перестановках (тобто при $\eta = k$) зазначена оцінка може бути поліпшена шляхом удосконалення упорядкування коефіцієнтів функції $\varphi(x, h)$ при $h \geq r$. Запропоноване удосконалення ґрунтується на тому факті, що для деяких пар індексів відповідні коефіцієнти функцій $\varphi(x, h)$ і $\varphi(x, h')$ упорядковані однаково.

Нехай $t \in J_{s-1}^{r-1}$ таке, що $I(t) \neq \emptyset$; індекси q_t задовольняють співвідношення (3), причому $\alpha(q_v, q_w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Доведено, що тоді для всіх $l, p \in J_w^v$ виконується одна з двох умов: $\bar{\alpha}(q_l, q_p) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$ або $\bar{c}_{q_l}(h) = \bar{c}_{q_p}(h)$ для всіх $h \in R^1$.

Нехай v, w — відповідно найменше й найбільше числа такі, що $\bar{\alpha}(q_v, q_w) = \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})$. Тоді для кожної пари індексів q_l, q_p , де $l, p \in J_w^v$, упорядкування коефіцієнтів $\bar{c}_{q_l}(\lambda)$ і $\bar{c}_{q_p}(\lambda)$ зміниться при $\lambda' \in I(t+f)$. Якщо ж $l \in J_w^v, p \notin J_w^v$, то упорядкування коефіцієнтів $\bar{c}_{q_l}(\lambda)$ і $\bar{c}_{q_p}(\lambda)$ не зміниться. Таким чином, коефіцієнти, порядок яких змінюється, утворюють одну або кілька груп коефіцієнтів, розташованих підряд у співвідношенні (3). У кожній із таких груп порядок коефіцієнтів змінюється на протилежний. Упорядкування коефіцієнтів з урахуванням наведених міркувань вимагає $O(k)$ операцій. Тоді за умови використання ефективних алгоритмів при сортуванні величин (5) (з часовою складністю не гірше $O(n^{1.5})$) алгоритм розв'язування безумовної дробово-лінійної задачі комбінаторної оптимізації на перестановках вимагає $O(k^3)$ операцій.

Зазначимо, що мінімаль, одержана у відповідності з розглянутим методом, може виявитися не єдиною. Для отримання решти розв'язків може бути використаний підхід, наведений у [3].

Викладені в доповіді результати можуть використовуватися при розв'язуванні інших класів оптимізаційних задач, у тому числі, з різними видами невизначеності.

Література

1. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.
2. Емец О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / О. А. Емец, О. А. Черненко. – К. : Наукова думка, 2011. – 154 с. – Режим доступа: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467>.

3. Емец О.А. Лексикографическая комбинаторная оптимизация дробно-линейной функции на размещениях / О.А. Емец, Т.Н. Барболина // Матеріали Вісімнадцятого Міжнародного науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кіровоград, 15-16 квітня 2016 р.). – Кіровоград, 2016. – С. 67-77.

СУПЕРПОЗИЦИЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Е. П. Зайцев, E – mail: zaytsev-knu@mail.ru

Кировоградская летняя академия

Национального авиационного университета

Аннотация. Применение конструкционных материалов, успешно функционирующих в условиях высокотемпературного теплообмена, наряду с изотропными, широкое применение находят анизотропные материалы, проблема достоверного определения термонапряженного состояния которых имеет большое значение в общем комплексе инженерных расчетов. Целью исследования является разработка и апробация нового метода к решению задач квазистатической термоупругости анизотропных тел, с учетом термочувствительности материала и высокотемпературного теплообмена с окружающей средой.

Abstract. Use of the constructional materials which are successfully functioning in the conditions of high-temperature heat exchange along with the isotropic, broad application is found by anisotropic materials which problem of authentic determination of thermotension is of great importance in the general complex of engineering calculations. A research objective is development and approbation of new approach to the decision of tasks of quasistatic thermoelasticity of anisotropic bodies, taking into account thermosensitivity of material and high-temperature heat exchange with the environment.

В работе [1] рассмотрено обобщение разработанного метода решения задач нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел на случай трехмерного пространства. Применим этот метод для суперпозиции основных уравнений квазистатической термоупругости.

Согласно общей схемы решения задачи несвязанной квазистатической термоупругости, определим вначале температурное поле тела G из решения краевой задачи относительно $\vartheta = T - T_0$:

$$\begin{aligned} \circ \quad C_v(\vartheta)\vartheta_{,t} &= \{\lambda_{ij}(\vartheta)\vartheta_{,j}\}_{,i} + w_t(\vartheta), \quad (M \in G, t > 0); \quad \vartheta(M, t) = 0, \\ (M \in \bar{G}, t = 0); \\ n_i \lambda_{ij}(\vartheta)\vartheta_{,j} &= Q(M, t) - (\alpha + 4T_0^3 \sigma_a)\vartheta - \sigma_a(\vartheta^4 + 4\vartheta^3 T_0 + 6\vartheta^2 T_0^2), \quad (M \in S) \end{aligned}$$

• (1)

где \circ и \bullet начало, и конец группы соотношений; $Q(M, t) = \alpha(T_c(M, t) - T_0) + \sigma_a(T_c^4(M, t) - T_0^4)$; $\lambda_{ij}(\vartheta)$, $(i, j = 1, 2, 3)$ – компоненты тензора теплопроводности; $w_t(\vartheta)$ – плотность внутренних источников тепла; α – коэффициент теплоотдачи с поверхности S тела; $\sigma_B = \varepsilon\sigma_0$ – видимый коэффициент теплообмена излучением.

В системы (1) введем преобразования Гудмэна и Кирхгофа [1]

$$A(\vartheta) = \int_0^\vartheta C_v(\vartheta') d\vartheta', \quad D_{ij}(\vartheta) = \int_0^\vartheta \lambda_{ij}(\vartheta') d\vartheta', \quad (2)$$

Используя дифференциальные соотношения для перехода к новым функциям $A(\vartheta)_{,t} = C_v(\vartheta)\vartheta_{,t}$, $D_{ij}(\vartheta)_{,j} = \lambda_{ij}(\vartheta)\vartheta_{,j}$, полученным из (2) при их дифференцировании по соответствующим координатам, систему (1) представим в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \circ \quad A(\vartheta)_{,t} &= D_{ij}(\vartheta)_{,ij} + w_t(\vartheta), \quad \vartheta(M, t) = 0, \\ n_i D_{ij}(\vartheta)_{,j} &= Q(M, t) - (\alpha + 4T_0^3 \sigma_a)\vartheta - \sigma_a(\vartheta^4 + 4\vartheta^3 T_0 + 6\vartheta^2 T_0^2). \bullet \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (3) функции (2) и ϑ^m ($m = \overline{1, 4}$) удовлетворяют условиям Дирихле на некотором априорно выбранном интервале $(0, \vartheta_p)$, а, следовательно, их можно представить в виде следующих сходящихся рядов Фурье по синусам:

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(1)} \sin\left(\frac{k\pi\vartheta}{\vartheta_p}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^{(k)}; \quad (4)$$

$$(A(\mathcal{G}), D_{ij}(\mathcal{G}), w_i(\mathcal{G}), \mathcal{G}^m) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k / \beta_k^{(1)}, d_{ij}^{(k)} / \beta_k^{(1)}, g_k / \beta_k^{(1)}, \alpha_k^{(m)} / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)}, \quad (5)$$

$$\text{где } \mathcal{G}^{(k)} = \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\mathcal{G} / \mathcal{G}_p), (a_k, d_{ij}^{(k)}, g_k, \beta_k^{(m)}) = \frac{2}{\mathcal{G}_p} \int_0^{\mathcal{G}_p} (A(\mathcal{G}), D_{ij}(\mathcal{G}), w_i(\mathcal{G}), \mathcal{G}^m) \times \sin(k\pi\mathcal{G} / \mathcal{G}_p) d\mathcal{G}. \quad (6)$$

С учетом (4), (5) и разложения экспоненты e^x в ряд Маклорена при $x=1$, систему (3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \circ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)} \right)_{,t} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (d_{ij}^{(k)} / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)} \right)_{,ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (g_k / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(k)}(M, t) &= 0, n_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} (d_{ij}^{(k)} / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)} \right)_{,j} = Q(M, t) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1} / (k-1)! - \\ &- (\alpha + 4T_0^3 \sigma_{\bar{a}}) \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}^{(k)} - \sigma_{\bar{a}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k^{(4)} / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)} + \right. \\ &\left. + 4T_0 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k^{(3)} / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)} + 6T_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k^{(2)} / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)} \right). \bullet \quad (7) \end{aligned}$$

Используя обобщенный принцип суперпозиции [1, 2], систему (7) можно преобразовать к совокупности линейризованных задач теплопроводности относительно $\mathcal{G}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \circ \mathcal{G}_{,t}^{(k)} &= d_{ij}^{(k)} a_k^{-1} \mathcal{G}_{,ij}^{(k)} + g_k a_k^{-1} \mathcal{G}^{(k)}, \quad \mathcal{G}^{(k)}(M, t) = 0, \\ n_i d_{ij}^{(k)} \mathcal{G}_{,j}^{(k)} + B_i \mathcal{G}^{(k)} &= M_k, \bullet \quad (8) \end{aligned}$$

где $M_k = Q(M, t) \beta_k^{(1)} e^{-1} / (k-1)!$,

$$B_i = (\alpha + 4T_0^3 \sigma_{\bar{a}}) \beta_k^{(1)} + \sigma_{\bar{a}} (\beta_k^{(4)} + 4T_0 \beta_k^{(3)} + 6T_0^2 \beta_k^{(2)})$$

Решение линейризованной системы (8) символически запишется

$$\mathcal{G}^{(k)}(M, t) = R^{(k)}(M, t). \quad (9)$$

После суммирования (9) по k , согласно (4), окончательно получим решение исходной задачи

$$\mathcal{G}(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R^{(k)}(M, t). \quad (10)$$

Значение \mathcal{G}_p определяется из условия, что при $t \rightarrow \infty$, \mathcal{G} (10), в фиксированной точке поверхности тела $M_1 \in S$, стремится к \mathcal{G}_p , т. е.

$$\mathcal{G}_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} R^{(k)}(M_1, t). \quad (11)$$

Вычисляя по значению \mathcal{G}_p коэффициенты рядов Фурье (6), M_k и V_k , получим решение задачи теплопроводности.

Вторым этапом решения, является определение термонапряженного состояния тела, вызванного механическими воздействиями X_i и известным температурным полем (10). Математически такой процесс описывается следующей системой уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \circ \sigma_{i,j} + X_i = 0; \quad \varepsilon_{ij} = s_{ijml}(\mathcal{G}) \cdot \sigma_{ml} + F_{ij}(\mathcal{G}); \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2; \\ \sigma_{ij} n_j = p_i(M), \quad (M \in S_\sigma); \quad u_i = U_i(M), \quad (M \in S_u), \quad \bullet \end{aligned} \quad (12)$$

где $s_{ijml}(\mathcal{G})$ – модули упругой податливости; $p_i(M)$ – компоненты поверхностной силы; $U_i(M)$ – заданные на поверхности S_u функции; $S = S_\sigma + S_u$. Предполагая, что на интервале $(0, \mathcal{G}_p)$, функции $s_{ijml}(\mathcal{G})$, $F_{ij}(\mathcal{G})$ удовлетворяют условиям Дирихле, представим их и единицу в виде разложений в ряды Фурье-Бесселя и Фурье по синусам:

$$\begin{aligned} \circ 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(0)} J_n \left(\frac{v_k \mathcal{G}}{\mathcal{G}_p} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k; \quad V_k = \alpha_k^{(0)} J_n \left(\frac{v_k \mathcal{G}}{\mathcal{G}_p} \right); \quad s_{ijml}(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ijml}^{(k)}}{\alpha_k^{(0)}} V_k; \\ F_{ij}(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{ij}^{(k)}}{\beta_k^{(1)}} \mathcal{G}^{(k)}, \quad \bullet \end{aligned} \quad (13)$$

где $(\alpha_k^{(0)}, a_{ijml}^{(k)}) = 2\mathcal{G}_p^{-2} J_{n+1}^{-2}(v_k) \int_0^{\mathcal{G}_p} \mathcal{G} \left(1, s_{ijml}(\mathcal{G}) \right) J_n \left(\frac{v_k \mathcal{G}}{\mathcal{G}_p} \right) d\mathcal{G}$,

$$f_{ij}^{(k)} = \frac{2}{\mathcal{G}_p} \int_0^{\mathcal{G}_p} F_{ij}(\mathcal{G}) \cdot \sin(k\pi\mathcal{G}/\mathcal{G}_p) d\mathcal{G},$$

а v_k ($k=1, 2, \dots$) – корни уравнения $J_n(v) = 0$. Используя (13) систему (12) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \circ \left(\sigma_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,j} + X_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1/(k-1)!} = 0; \\ \varepsilon_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \left\{ \left(u_i \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,j} + \left(u_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,i} \right\} / 2; \\ \varepsilon_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \sigma_{ml} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ijml}^{(k)} / \alpha_k^{(0)}) V_k + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ij}^{(k)} / \beta_k^{(1)}) \mathcal{G}^{(k)}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij} n_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k = p_i(M) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!, \quad (M \in S_{\sigma});$$

$$u_i \sum_{k=1}^{\infty} V_k = U_i(M) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!, \quad (M \in S_u). \bullet \quad (14)$$

Вводя не зависящие от k компоненты напряжений σ_{ij} , деформаций ε_{ij} , перемещений u_i , объемных X_i и поверхностных p_i сил, функций U_i под знаки сумм в системе (14), используя обозначения

$$\left(\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}\right) = \left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\right) V_k, \quad s_{ijml}^{(k)} = a_{ijml}^{(k)} / \alpha_k^{(0)},$$

$$\left(X_i^{(k)}, p_i^{(k)}, U_i^{(k)}\right) = \left(X_i, p_i, U_i\right) \frac{e^{-1}}{(k-1)!}, \quad \beta_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}^{(k)}}{\beta_k^{(1)}},$$

и применяя к системе принцип суперпозиции, получим совокупность краевых задач линейной термоупругости с постоянными приведенными термоупругими характеристиками $s_{ijml}^{(k)}, \beta_{ij}^{(k)}$:

$$\circ \sigma_{ij,j}^{(k)} + X_i^{(k)} = 0; \quad \varepsilon_{ij}^{(k)} = s_{ijml}^{(k)} \cdot \sigma_{ml}^{(k)} + \beta_{ij}^{(k)} \mathcal{G}^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij}^{(k)} = (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)})/2;$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} n_j = p_i^{(k)}(M), \quad (M \in S_{\sigma}); \quad u_i^{(k)} = U_i^{(k)}(M), \quad (M \in S_u). \bullet \quad (15)$$

Определяя k -е компоненты решений системы (15), а затем, суммируя их по k , получим приближенное аналитическое решение поставленной задачи.

Литература

1. Зайцев Е. П. Суперпозиция уравнений трехмерной нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, – 2010. – Вип. 5(64). Част. 1. – С. 44–48.

2. Зайцев Е. П. Влияние тепловой анизотропии и двойной нелинейности на температурное поле сплошного бесконечного трансверсально-изотропного цилиндра // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 4 (99). – С 23 – 29.

3. Noda, N., Hetnarski, R. B. and Tanigawa, Y. (2003), Thermal Stresses, 2nd edition. Taylor and Francis, New York.

САМООПИСУЮЧІ НУМЕРАЦІЇ ДЕЯКИХ ГРАФІВ

О.В.Ізвалов, к.т.н., izvalov.klanau@gmail.com

Кіровоградська льотна академія

Національного авіаційного університету

Поточне дослідження було розпочато у [1] наданням визначення для самоописуючої нумерації графу першого типу (С1-нумерації). С1 нумерація графу є такою, при якій число у кожній вершині дорівнює кількості суміжних вершин, що занумеровані числами іншими, ніж дана. Приклад С1-нумерації наведено на рис.1. Для кожної вершини з числом 2 рівно 2 сусіди занумеровані не двійкою. А для кожної вершини з числом 4 рівно 4 сусіди занумеровані не четвіркою.

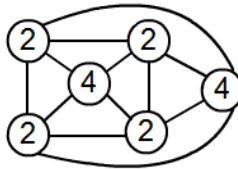


Рис.1. Приклад С1-нумерації

У [2] розглядалися алгоритми побудови та перевірки існування самоописуючих нумерації першого та другого типів. Робота наразі продовжується, і можна навести декілька класів графів, для яких можна узагальнити С1-нумерацію.

Тут і надалі не будемо розглядати тривіальну самоописуючу нумерацію, яка здійснюється нумерацією кожної вершини нулем (тоді для кожної вершини рівно 0 сусідів будуть занумеровані НЕ нулем, тобто властивість С1-нумерації киюється).

Для простих циклів нетривіальна С1-нумерація можлива, лише якщо їх довжина дорівнює $3n$. В такому разі вершини нумеруються числами $\dots-2-1-1-\dots$

Для кожного колеса W_n (з довжиною цикла n) можлива С1-нумерація: центральна вершина має бути занумерована числом n , а решта — нулями.

Для графів призми $GP(k,1)$ виділяється цикл довжини k , всі вершини якого нумеруються одиницями. Серед решти вершин

виділяють пари суміжних вершин, що нумеруються двійками, та одинокі вершини, що нумеруються трійками.

Висновок

Робота над дослідженням самоописуючих графів триває. Узагальнений вигляд самоописуючої нумерації та її існування буде побудовано для інших класів.

Література

1. Извалов А.В. Самоописывающие нумерации графов //Материалы Международного научного семинара «Дискретна математика та її застосування у економіко-математичному моделюванні та інформаційних технологіях» (Запорожжє, 11-13 октября 2012 г.). – Запорожжє: ДВЗН Запорожский національний університет, 2012. – С. 32-33.

2. A.Izvalov, Self –descriptive trees, //Матеріали XVII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (17-18 квітня 2015 г.) – Кировоград – С.47-51

ПРО ДОВЖИНУ ОПТИМАЛЬНОГО КОДА ПРИ АЛФАВІТНОМУ КОДУВАННІ

Іллічева Л.М.

m_licheva@ukr.net

*Київська державна академія водного транспорту
ім. П. Конашевича-Сагайдачного, м. Київ, Україна*

Аннотация. В работе оценивается точная нижняя граница для длины оптимального кода при алфавитном кодировании

Abstract. The estimation of strong infimum limit for the length of optimal code for alphabetical coding is given

Як відомо, в теорії кодування визначені оптимальні коди, тобто коди із мінімальною надлишковістю. Якщо задано алфавит $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ та ймовірності появи букв у повідомленні $P = (p_1, p_2, \dots, p_r)$, де p_i – ймовірність появи букви a_i . Причому, $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$. Скінченну

послідовність букв $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_l}$ в алфавіті A називають словом в цьому алфавіті. Число l – кількість букв у слові α – називають довжиною слова α і позначають $l(\alpha)$. Якщо задано скінченний алфавіт $B = \{b_1, \dots, b_q\}$ і β – слово в алфавіті B . Якщо $|B| = q$, кодування називають q -ковим. Найчастіше використовують $B = \{0, 1\}$, тобто двійкове кодування. При заданні відображення F , яке кожному слову α ставить у відповідність слово $\beta = F(\alpha)$ слово β називають кодом повідомлення α . Перехід від слова α до його коду називають кодуванням. Алфавітне кодування задають схемою (або таблицею кодів) σ як відповідність між буквами алфавіту A та деякими словами в алфавіті B . Слова β_1, \dots, β_r називають елементарними кодами. Схему σ називають роздільною, якщо з рівності $\beta_{i_1} \dots \beta_{i_k} = \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k}$ випливає, що $k = l$ та $i_t = j_t$ для кожного $t = 1, \dots, k$, тобто довільне слово, складене із елементарних кодів можна єдиним способом розкласти на елементарні коди. Алфавітне кодування із роздільною схемою допускає однозначне декодування.

Для кожної роздільної схеми алфавітного кодування σ математичне сподівання коефіцієнта збільшення довжини повідомлення в разі кодування (позначають $l_{\text{сер}}^\sigma$) визначають так:

$$l_{\text{сер}}^\sigma(P) = \sum_{i=1}^r p_i l_i,$$

де $l_i = l(\beta_i)$, $i = 1, \dots, r$ і називають середньою довжиною кодування за схемою σ для розподілу ймовірностей P . [1]

Якщо ввести величину $l_* = \inf_{\sigma} l_{\text{сер}}^\sigma$, де нижню грань беруть за всіма роздільними схемами σ , можна довести, що $1 \leq l_* \leq \lceil \log_2 r \rceil$ де верхню оцінку дає схема з елементарними кодами з однаковою довжиною $\lceil \log_2 r \rceil$. Нижню границю можна одержати, скориставшись лемою 2.1 [2]:

Нехай $\{p_i\}, \{q_i\}, i = 1, \dots, n - 2$ системи невід'ємних чисел.

$$\sum_1^n p_i = \sum_1^n q_i = 1.$$

Тоді справедлива нерівність:

$$-\sum_1^n q_i \log_2 q_i \leq -\sum_1^n p_i \log_2 p_i.$$

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли

$$p_i = q_i, i = 1, \dots, n$$

Склавши відповідну нерівність для ймовірностей появи букв алфавиту А у повідомленні та значеннь $2^{-l_i} / \sum_{i=1}^r 2^{-l_i}$ (як

відомо, $\sum_{i=1}^r 2^{-l_i} / \sum_{i=1}^r 2^{-l_i} = 1$), одержимо наступні

співвідношення:

$$-\sum_{i=1}^r p_i \log_2 p_i \leq -\sum_{i=1}^r \log_2 \frac{2^{-l_i}}{\sum_{i=1}^r 2^{-l_i}} = \log_2 \sum_{i=1}^r 2^{-l_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^r p_i l_i \log_2 2 \leq \sum_{i=1}^r p_i l_i.$$

Згідно із нерівністю Мак-Міллана (теорема 6.3 [1]),

$$\sum_{i=1}^r 2^{-l_i} \leq 1, l_i = l(\beta_i). \text{ Тому, } \log_2 \sum_{i=1}^r 2^{-l_i} \leq \log_2 1 = 0.$$

Тоді одержимо: $l_* = -\sum_{i=1}^r p_i \log_2 p_i = H(A)$, де $H(A)$ – ентропія для слів із алфавіта А.

Тобто, якщо набір можливих повідомлень та їх ймовірності відомі, для кожного окремого повідомлення кількість інформації дорівнює логарифму величини, яка є зворотною до частоти (статистичній ймовірності) появи цього повідомлення. Для розрахунку середньої кількості інформації додаються добутки значень статистичних ймовірностей на кількість інформації для кожного повідомлення, тобто на логарифм величини, зворотної до цієї ймовірності:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

Література

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика /Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина – К: Видав. гр. ВНУ, 2007. – 368 с.

2. Файнштейн А. Основы теории информации/А. Файнштейн – М: изд. ИЛ, 1960.- 137 с.

Светлой памяти А.Я. Петренюка посвящается

ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ, ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ И ЖЕСТКОСТЬ ФЕРМ

Исаченко А. Н., isachen@bsu.by

Белорусский государственный университет

Ревякин А.М., arevyakin@mail.ru

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Аннотация. Рассматриваются алгоритмы для решения задач введения на улицах эффективной схемы одностороннего движения и оптимального размещения соединительных элементов для жесткости планарной квадратной фермы. В основе алгоритмов решения этих задач лежит понятие сильной связности орграфа. Для решения использованы алгоритмы построения остовов минимального веса и кратчайших расстояний, а также методы нахождения центров и медиан в сети.

Abstract. Algorithms for solving the problems of introducing effective one-way traffic on the streets and optimal placement of connecting elements for the rigidity of a planar square framework are considered. The algorithms for solving these problems are based on the notion of strongly connected graph. For the solution are used algorithms for constructing spanning trees of minimal weight or shortest distances, as well as methods for finding centers and medians in network.

Используются терминология и обозначения монографий Н. Кристофидеса и А. Речки [1, 2].

Пусть для сети городских улиц с двусторонним движением надо ввести одностороннее движение, так чтобы из любого места можно было попасть в любое другое. Построим граф G , используя в качестве вершин перекрёстки города и соединяя два перекрёстка ребром тогда и только тогда, когда они соединены улицей с двусторонним движением. Вопрос теперь состоит в следующем. Можно ли на множестве рёбер задать ориентацию так, чтобы в получающемся при этом ориентированном графе $G=(V, E)$ из каждой вершины u была достижима любая другая вершина v ? Такая ориентация называется сильно связной.

Теорема (Роббинс [3]). Граф G имеет сильно связную ориентацию тогда и только тогда, когда G связан и не содержит мостов.

Если $G=(V, E)$ – связный граф без мостов, то сильно связную ориентацию можно получить, например, так.

Сначала с помощью алгоритм поиска в глубину строим для графа G корневое остовное дерево. Идея этого метода состоит в следующем. Пусть G – неориентированный связный граф. В процессе поиска в глубину вершинам графа G присваиваются номера, а его рёбра помечаются. Вначале рёбра не помечены, а вершины не имеют номеров. Начинаем с произвольной вершины v . Присваиваем ей номер 1 и выбираем произвольное ребро (v, u) . Ребро (v, u) помечается как «прямое», а вершина u получает номер 2. После этого переходим в вершину u . Пусть в результате выполнения нескольких шагов этого процесса пришли в вершину a , и пусть k – последний присвоенный номер. Далее действуем в зависимости от ситуации следующим образом.

А). Имеется непомеченное ребро (a, b) . Если у вершины b уже есть номер, то ребро (a, b) помечаем как «обратное» и продолжаем поиск непомеченного ребра, инцидентного вершине a . Если же вершина b номера не имеет, то присвоим ей номер $k+1$, ребро (a, b) помечаем как «прямое» и переходим в вершину b . Вершина b считается получившей свой номер из вершины v . На следующем шаге будем просматривать рёбра, инцидентные вершине b .

Б). Если все рёбра, инцидентные вершине a , помечены, то возвращаемся в вершину, из которой a получила свой номер.

Процесс закончится, когда все рёбра будут помечены и произойдёт возвращение в вершину v .

Описанный процесс можно реализовать так, чтобы время работы соответствующего алгоритма составляло $O(|V|+|E|)$. Все ребра (ветви) полученного дерева ориентируем от вершин с меньшими номерами к вершинам с большими номерами.

После того, как для графа G получено остовное дерево, завершаем процесс ориентации G , ориентируя все оставшиеся рёбра (хорды) из вершин с большими номерами к вершинам с меньшими номерами.

Описанный алгоритм может, к сожалению, породить весьма неэффективные схемы одностороннего уличного движения [4,5].

Необходимо определить понятие «эффективной» схемы одностороннего движения и разработать алгоритмы её нахождения.

Назовём подмножество A семейства дуг E ориентацией графа G . Пусть требуется ввести одностороннее движение не на всех улицах, а на большей части из них. Другими словами, нужно задать ориентацию A сети $G=(V, E)$ так, чтобы из каждой вершины u была достижима любая другая вершина v . В качестве критерия эффективности схемы будем рассматривать диаметр получающегося сильно связанного смешанного графа, т.е. $\max d(u, v)$ по всем $u, v \in E$, где $d(u, v)$ – длина кратчайшего пути из u в v .

Для решения этой задачи предлагаем поступать, например, так.

1. С помощью алгоритма Флойда [1,5] найти матрицу D кратчайших расстояний между вершинами сети $G=(V, E)$.

2. В сети $G=(V, E)$ найти центр [1,5]. Центром является вершина v , которой соответствует строка матрицы D , содержащая элемент с наименьшим максимальным значением.

3. С помощью алгоритма Дейкстры [1,5] строим остов T кратчайших расстояний из центра сети $G=(V, E)$ во все остальные вершины. Ориентацию ветвей остова T и нумерацию вершин осуществляем с помощью алгоритма поиска в глубину на дереве T из центра a сети G .

4. Ориентируем все хорды сети G от вершин с большими номерами к вершинам с меньшими номерами. Находим кратчайшие расстояния в неориентированной сети, составленной из хорд сети G , из центра a во все остальные вершины. В случаях, когда расстояние превосходит диаметр сети или вершина не достижима из a , снимаем ориентацию на соответствующих ветвях, делая их неориентируемыми.

Будем говорить, что G уязвим по дугам, если при удалении некоторой дуги получается орграф, не являющийся

сильно связным. Степенью дуговой уязвимости орграфа называется минимальное число дуг, при удалении которых получается орграф с меньшей категорией связности. Представляется интересной задача введения не только эффективной схемы одностороннего движения, но и с наибольшей степенью дуговой уязвимости. Эта задача, сформулированная в [4], до настоящего времени не решена.

Жёсткость ферм. Рассмотрим $k \times l$ квадратную решётку как планарную ферму, состоящую из жёстких стержней и соединяющих их шарниров. Если добавить в некоторые квадраты дополнительно диагональные стержни, то в одних случаях ферма становится жёсткой, т.е. не поддаётся деформации, а в других нет. Возникает естественный вопрос: куда следует добавить диагональные стержни, чтобы ферма стала жёсткой?

Определим двудольный граф $G=(V, E)$ с множеством вершин $V=\{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_l\}$ и соединим в нём вершины v_i и u_j ребром в том и только том случае, когда в квадрате сетки, соответствующей i -й строке и j -му столбцу, размещён диагональный стержень.

Теорема (Болкер, Крапо [6,7]). Квадратная решётка с некоторым набором диагональных стержней жёстка тогда и только тогда, когда двудольный граф G связан.

Следовательно, минимальное число диагональных стержней, которые необходимо добавить для жёсткости $k \times l$ -квадратной фермы, равно $k+l-1$. Именно это число равно числу рёбер в соответствующем остовном дереве графа G .

Например, (3×3) -ферма на рис.1 не является жёсткой, так как соответствующий ей двудольный граф не связан. Возможная деформация фермы также показана на рис.1.

Непосредственно из теоремы следует, что всякая $k \times l$ квадратная ферма для своей жёсткости требует $k+l-1$ диагональных стержня. Причём, эти $k+l-1$ стержни делают ферму жёсткой тогда и только тогда, когда соответствующий двудольный граф является остовным деревом (остовом).

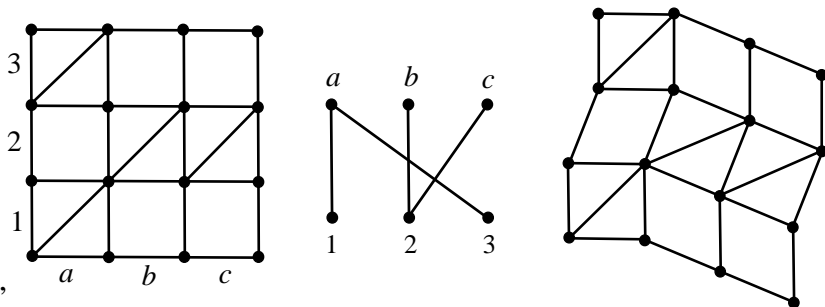


Рис.1. Планарная (3×3)-ферма, её двудольный граф и деформация

Рассмотрим фермы, в которые вместо жёстких диагональных стержней добавлены деформирующие (растягивающие) верёвки. В этой ситуации приобретает важность, по какой диагонали связали квадрат (снизу вверх, или наоборот). На рис.2 с равным числом верёвок по-разному завязаны вершины квадрата. В результате первая ферма (*a*) становится жёсткой, а вторая (*б*) – нет. На рис.2,в показана деформация второй фермы.

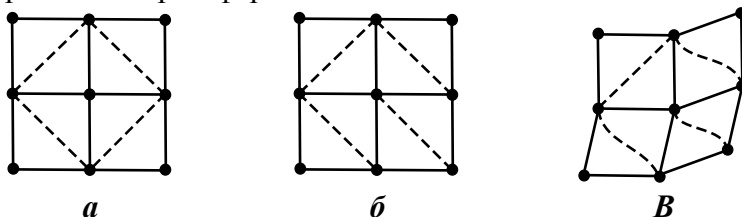


Рис.2. Фермы с равным количеством добавленных соединительных верёвок и деформация второй фермы

Рассмотрим две «смешанные» фермы (добавлены как жёсткие стержни, так и верёвки) на рис.3. Отличие этих ферм состоит в том, что по-разному привязаны верёвки. Причём первая ферма является жёсткой, а вторая – нет. Деформация второй фермы приведена на рис.3,в. Превратим смешанные графы соответствующих ферм в оргграфы заменой всех неориентированных рёбер парой дуг, направленных в противоположные стороны. Оргграфы рассматриваемых ферм представлены на рис.4.

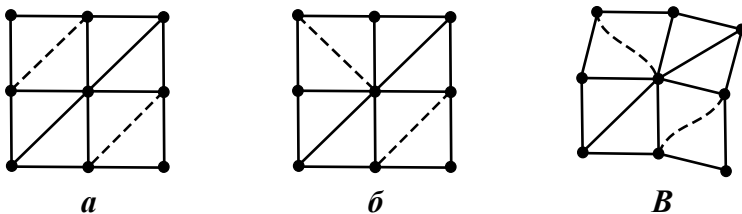


Рис.3. Смешанные фермы и деформация второй фермы



Рис.4. Орграфы смешанных ферм, изображённых на рис.3

Заметим, что орграф, соответствующий первой ферме, сильно связный, орграф второй фермы связный, но не сильно связный.

Можно доказать [2,8], что ферма с добавленными диагональными элементами стержнями или верёвками) является жёсткой в том и только в том случае, когда соответствующий ей орграф сильно связан. Следовательно, чтобы квадратную $k \times l$ ферму сделать жёсткой, используя верёвки, нужно добавить, по крайней мере, $2 \max\{k, l\}$ элементов.

Пусть для заданной планарной фермы известны места, где могут быть размещены диагональные стержни или веревки, а также стоимость такого размещения. Требуется разместить диагональные соединения так, чтобы ферма стала жесткой с наименьшими затратами. Другими словами, необходимо в двудольной сети найти ориентацию минимального веса.

Для решения этой задачи предлагаем поступать, например, так.

1. С помощью алгоритма Флойда [1,5] найти матрицу D кратчайших расстояний между вершинами сети $G=(V, E)$.

2. В сети $G=(V, E)$ найти медиану [1,5]. Медиана – это такая вершина сети, что сумма расстояний от неё до всех остальных вершин графа минимальна.

3. С помощью одного из алгоритмов Краскала, Прима или Борушки [1,2,5] строим остов T минимального веса. Ориентацию ветвей остова T и нумерацию вершин осуществляем с помощью алгоритма поиска в глубину на T из медианы a сети G .

4. Ориентируем все хорды сети G от вершин с большими номерами к вершинам с меньшими номерами. Находим остов (или лес) минимального веса в неориентированной сети, составленной из хорд сети G . В случаях, когда сеть из хорд не связна, добавляем некоторые ветви чтобы сделать сеть связной, делая их неориентируемыми.

Литература

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

2. Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics.- Budapest: Akad. Kiado, 1989. – 531 с.

3. Robbins H.I. A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control. // Amer. Math. Monthly. – 1939. – V. 46, P. 281–283.

4. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986. – 496 с.

5. Ревякин А. М., Бардушкина И. В. Математические методы моделирования в экономике. Учебное пособие. – М.: МИЭТ, 2013. – 328 с.

6. Bolker E.D., Crapo H. How to brace a one-story building? // Environment and Planning B. – 1977. – V. 4, P. 125–152.

7. Crapo H. More on the bracing of one-story buildings. // Environment and Planning B. – 1977. – V. 4, P. 153–156.

8. Ревякин А.М., Речки А. Жесткость планарных ферм с удаленными фрагментами. // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2004. – С. 219–221.

ПРО ОДИН ЗІ СПОСОБІВ ДОВЕДЕННЯ ВЛАСТИВОСТІ НЕПАРНИХ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

Кадубовський О. А.

kadubovs@ukr.net

ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

Анотація. В статті розглядаються числа Каталана 1, 1, 2, 5, 14, 42, ..., для членів послідовності котрої використовується нумерація $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ і т.д. Изложено один из способів доведення властивості нечетных чисел Каталана, а именно: члены послідовності C_n являются нечетными числами тогда и только тогда, когда их номера имеют вид $n = 2^k - 1$ при некотором целом неотрицательном k .

Abstract. We have considered the Catalan numbers 1, 1, 2, 5, 14, 42, ... in the article. The following numbering is used for the members of the sequence where $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, etc. The one of the ways of proof of the properties of the odd Catalan numbers is offered, namely C_n is odd if and only if $n = 2^k - 1$ for some of a non-negative integer k .

Про числа Каталана відомим є наступне висловлення Мартіна Гарднера: «Они не так известны, как числа Фибоначчи, но не менее вездесущи, обладая удивительной способностью возникать в самых неожиданных местах, особенно при решении комбинаторных задач» [16, С. 285].

З історією виникнення чисел Каталана, задачами, що до них призводять, та деякими їх застосуваннями можна ознайомитися, наприклад, в [10], [7], [16], [18]. З добірками бібліографії щодо відомих результатів та застосувань – наприклад, в [5], [7], [13], [15] (послідовність A000108), [16]. Слід відзначити, що Р. Стенлі в роботах [12], [13] зібрав більше 200 інтерпретацій чисел Каталана.

Добре відомо, що рекурентні формули для n -го числа Каталана мають різний вид в залежності від того, в який спосіб занумеровано члени послідовності [16]. Відтепер і в подальшому будемо вважати, що зазначена послідовність починається саме так:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...

Причому, нумерація членів цієї послідовності ведеться починаючи з «нульового», тобто: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ і т.д.. Слід зазначити, що саме такий підхід використовується до нумерації членів цієї послідовності **A000108** в [15], роботах [12], [13], [16], [17] та багатьох інших джерелах.

Тоді, як добре відомо (напр. [13]), за такої нумерації явна формула для n -го числа Каталана набуває найпростішого виду

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}. \quad (1)$$

Існує чимало робіт, присвячених дослідженню питань подільності, зокрема парності, членів послідовності Каталана. Так, наприклад, в роботі [2] досліджувались питання парності членів послідовності Каталана, а в роботах [9], [14] пізніше – більш загальне їх порівняння (конгруентність) за модулем степеня 2-ки.

Як зазначається в [2], декілька доведень властивості про номери непарних членів послідовності Каталана можна знайти в роботі [1]. В роботах [4], [11], [3] пізніше знайдено комбінаторні пояснення цього факту. В роботі [6] зазначену властивість встановлено за допомогою рекурентного співвідношення Сегнера («Segner's recurrence relation»). З іншими, не менш цікавими властивостями непарних членів послідовності Каталана, можна ознайомитися в роботі [8].

Одному з можливих способів доведення властивості непарних чисел Каталана й присвячена дана стаття. А з урахуванням того, що зазначена властивість пропонується в більшості сучасних навчальних посібників і збірників задач з алгебри та теорії чисел в якості задачі (напр. [18, С. 225]), то, принаймні з методичної точки зору, виклад ще одного, альтернативного, способу її доведення з дотриманням належного рівня математичної строгості є (на думку автора) доцільним.

Теорема 1. Члени послідовності C_n є непарними числами тоді і лише тоді, коли їх номери мають вид $n = 2^k - 1$, де $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доведення.

1) Не важко перевірити, що C_n можна подати у вигляді

$$C_n = (2n-1)!! \cdot \frac{2^n}{(n+1)!}, \quad (2)$$

де $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$ – непарний факторіал.

Тоді, з урахуванням (2), очевидно що C_n є непарним тоді і лише тоді, коли в канонічному представленні знаменника – числа $(n+1)!$ (у вигляді добутку степенів з різними простими основами) – степінь з основою 2 має показник n . Пояснимо справедливість останньої тези: якщо показник двійки строго менший за n , то очевидно, що C_n буде парним; якщо ж показник двійки більший за n , то C_n не буде цілим. Таким чином, для непарності C_n показник «2-ки» у вказаному представленні може бути лише числом n .

2) Обчислимо показник S степеня з основою 2 в канонічному представленні числа

$$A = (n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1). \quad (3)$$

Очевидно, що в добутку (3):

- кожен другий множник «дає» для S по «1-ці»; таких буде точно $\left[\frac{n+1}{2} \right]$ ($[q]$ – ціла частина числа q);
- кожен четвертий множник «дає» для S додатково ще по «1-ці»; таких буде точно $\left[\frac{n+1}{4} \right]$;
- кожен восьмий множник «дає» для S додатково ще по «1-ці»; таких буде точно $\left[\frac{n+1}{8} \right]$; ...
- кожен 2^k -ий множник «дає» для S додатково ще по «1-ці»; таких буде точно $\left[\frac{n+1}{2^k} \right]$.

Нехай далі, натуральне k є таким, що задовольняє умову $2^k \leq n+1 < 2^{k+1}$. Тоді показник S степеня з основою 2 у

вказаному канонічному представленні числа $A = (n+1)!$ становить

$$S = \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+1}{2^k} \right]. \quad (4)$$

Зауваження 1. Справедливість (4) є наслідком з формули Лежандра «про максимальний степінь простого числа, що ділить факторіал» (див., напр., [20, С. 129]), за якою число β_i входжень простого числа p_i до канонічного розкладу $n! = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\beta_m}$ визначається сумою

$$\beta_i = \left[\frac{n}{p_i} \right] + \left[\frac{n}{p_i^2} \right] + \left[\frac{n}{p_i^3} \right] + \dots \quad (4^*)$$

Доречи, термін «антьє» належить саме Адрієну-Марі Лежандру.

3) Таким чином, якщо $n = 2^m - 1$, то очевидно, що останній множник в добутку (3) набуває вид $(n+1) = 2^m$, звідки $k = m$. Але ж тоді співвідношення (4) можна подати у вигляді

$$S = 2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2^1 + 1 = \frac{1 \cdot (2^m - 1)}{2 - 1} = 2^m - 1 = n,$$

звідки й випливає, що кожен член послідовності Каталана з номером виду $n = 2^m - 1$ є непарним числом.

4) Тепер покажемо, що непарні члени послідовності Каталана можуть мати виключно номери виду $n = 2^l - 1$.

З урахуванням пункту 1) та рівності (4), C_n є непарним тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$S = \left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+1}{2^k} \right] = n, \quad (5)$$

де k є таким, що задовольняє умову $2^k \leq n+1 < 2^{k+1}$, яка рівносильна наступній $1 \leq \frac{n+1}{2^k} < 2$. Звідки $1 \leq \left[\frac{n+1}{2^k} \right]$.

Добре відомо, що «антьє суми не менше за суму антьє»

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n+1}{2^k} \right] \leq \left[\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{4} + \dots + \frac{n+1}{2^k} \right]. \quad (6)$$

Крім того, оскільки для дійсних x справджується нерівність $[x] \leq x$, то за транзитивністю нестрогої нерівності та з урахуванням (5) і (6), маємо

$$n \leq \left[\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{4} + \dots + \frac{n+1}{2^k} \right] \leq \left(\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{4} + \dots + \frac{n+1}{2^k} \right). \quad (7)$$

Неважко перевірити, що

$$\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{4} + \dots + \frac{n+1}{2^k} = (n+1) - \frac{n+1}{2^k}. \quad (8)$$

Оскільки $1 \leq \frac{n+1}{2^k} < 2$, то $-1 \geq -\frac{n+1}{2^k} > -2$, звідки

$$(n+1) - \frac{n+1}{2^k} \leq n. \quad (9)$$

І тому, з урахуванням співвідношень (7), (8) та (9),

справджується *рівність* $(n+1) - \frac{n+1}{2^k} = n,$

звідки $(n+1)\left(\frac{2^k-1}{2^k}\right) = n,$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2^k-1}{2^k}\right) = 1,$ $1+\frac{1}{n} = \frac{2^k}{2^k-1},$ $\frac{1}{n} = \frac{1}{2^k-1},$ $n = 2^k - 1.$

Останнє й завершує доведення твердження.

Література

1. Alter R., Curtz T.B. On binary nonassociative products and their relation to a classical problem of Euler. // Comment. Math. Prace Mat. – 1973. – Vol. 17, P. 1–8.
2. Alter R., Kubota K.K. Prime and prime power divisibility of Catalan numbers. // Journal of Combinatorial Theory, Series A. – 1973. – Vol. 15, P. 243–256.
3. Deutsch E. An involution on Dyck paths and its consequences. // Discrete Math. – 1999. – Vol. 204, P. 163–166.
4. Egecioğlu Ö. The parity of the Catalan numbers via lattice paths. // Fibonacci Quart. – 1983. – Vol. 21, P. 65–66.
5. Gould H.W. Bell and Catalan Numbers: A Research Bibliography of Two Special Number Sequences, Revised 2007 edition; available at <http://tinyurl.com/opknlh8>.
6. Koshy T., Salmassi M. Parity and Primality of Catalan Numbers. // College Mathematics Journal. – 2006. – Vol. 37, P. 52–53.

7. Koshy T. Catalan Numbers with Applications, Oxford University Press, 2009.
8. Lin H.-Y. Odd Catalan numbers modulo 2^k . // Integers. – 2011. – Vol. 12, Issue 2, P. 161–165.
9. Liu S.-C., Yeh J. Catalan numbers modulo 2^k . // Journal of Integer Sequences. – 2010. – Vol. 13, Issue 5, Article 10.5.4.
10. Pak I. History of Catalan numbers, Appendix B in: R. Stanley, Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015.
11. Simion R., Ullman D. On the structure of the lattice of noncrossing partitions. // Discrete Math. – 1991. – Vol. 98, P. 193–206.
12. Stanley R.P. Enumerative Combinatorics. Vol. 2. – Cambridge University Press, 1999. – 595 p.
13. Stanley R.P. Catalan Numbers. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
14. Xin G., Xu J.-F. A short approach to Catalan numbers modulo 2^r . // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2011. – Vol. 18, Issue 1, Paper 177, 12 p.
15. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.
16. Гарднер М. Путешествие во времени: Пер. с англ. – М. : Мир, 1990. – 341 с.
17. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М. : Мир, 1998. – 703 с.
18. Деза Е.И. Специальные числа натурального ряда: Учебное пособие. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 240 с.
19. Семенов И.Л. Антье и мантисса. Сборник задач с решениями. / Под ред. Е.В. Хорошиловой. – М. : ИПИМ им. М.В. Келдыша, 2015. – 412 с.

ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ

Карпенко В.М., intexnaftogaz@ukr.net

Національна акціонерна компанія "Нафтогаз України"

Аннотація. Общий метод конечных разностей рассматривает аппроксимацию отрезка непрерывной функции «левой» и «правой» производной одновременно.

Abstract. The general finite difference method considers the approximation of a segment of a continuous function of the "left" and "right" derivatives simultaneously.

Вступ. Метод кінцевих різниць широко використовується в комп'ютерних обчисленнях [1,2].

Проблема апроксимації безперервних функцій кінцевими різницями «лівою», «середньою» або «правою» похідною пов'язана з наявністю похибок, що при інтегруванні призводить до неправильних результатів.

Розв'язання проблеми вирішується введенням функцій похибок, які не усувають проблему, а тільки зменшують похибки.

Аналіз підходів до розв'язання проблеми показує, що точка може «дорівнювати» відрізку при умові рівності операторів диференціювання і інтегрування, тобто,

$$d.../dx = \pm \int_a^b ...dx .$$

Запропонований загальний метод кінцевих різниць (ЗМКР) дозволяє вирішити дану проблему на основі Аксиоми: *не кожна якість має необмежене кількісне значення, як при збільшенні, так і при зменшенні її, а має верхню та нижню границі існування, порушуючи які, якість стає іншою (ноюю). В межах границь свого існування якість незмінна, в той час, як кількісна її сторона змінюється в часі та просторі за довільним законом.*

Розглянемо ЗМКР на прикладі розв'язання простих диференціальних рівнянь, що моделюють перехід точки від стану $A(x_0, y_0, z_0)$ до стану $B(x_1, y_1, z_1)$ з різною частотою на площині X-t.

Під якістю руху розуміється рух: поступальний – D_- ; гіперболічний – D_c ; параболічний – D_α ; еліптичний – D_Ω ; стохастичний – D_- .

Розглянемо прості диференціальні рівняння з початковими умовами: $x_0(t_0) = a$, $x_1(t_1) = b$, вигляду: $\dot{x} = 0$, (1); $\dot{x} = c$, (2); $\dot{x} = cx$, (3); $\dot{x} = cx + d$, (4); $\ddot{x} + cx = d$, (5).

Розв’язок рівняння (1). Згідно аксіомі про незмінну якість x , рівняння (1) можна представити подвійно з метою аналізу тільки кількісних змін

$$\left\{ \begin{aligned} dx/dt = x/t \cdot (\beta - 1)/(\alpha - 1) = 0 & \& dx/dt = x/t \cdot (1 - 1/\beta)/(1 - 1/\alpha) = 0, \\ (6) \end{aligned} \right.$$

де $\beta = x_1(t_1)/x_0(t_0)$, $\alpha = t_1/t_0$.

Так, як $(\beta - 1)/(\alpha - 1) = (1 - 1/\beta)/(1 - 1/\alpha) \rightarrow \alpha = \beta$, а якість $x \neq 0$, то $\beta = 1$ і $x_1(t_1) = x_0(t_0) = a = b$, тоб то, $x(t) = a$. При $a > 1$ умова $x_1(t_1) \cdot t_0 = x_0(t_0) \cdot t_1 = \text{const}$ не виконується.

Розв’язок рівняння (2). Згідно аксіомі про незмінну якість x , рівняння (2) можна представити подвійно аналогічно (6)

$$\left\{ \begin{aligned} dx/dt = x/t \cdot (\beta - 1)/(\alpha - 1) = c & \& dx/dt = x/t \cdot (1 - 1/\beta)/(1 - 1/\alpha) = c, \\ (7) \end{aligned} \right.$$

Оскільки похідна однакова, запишімо систему рівнянь вигляду

$$\left\{ \begin{aligned} \beta = ct(\alpha - 1)/x + 1 \\ \beta = 1/[1 - ct(1 - 1/\alpha)/x] \end{aligned} \right. \rightarrow \left[ct \frac{(\alpha - 1)}{x} + 1 \right] = \frac{1}{[1 - ct(1 - 1/\alpha)/x]} \rightarrow \alpha = 1, (8)$$

звідки $\beta = 1$.

Знаходимо рішення для рівняння (2)

$$x(t) = ct, (9)$$

тоб то, рівне рішення, що знаходиться з використанням метода нескінченно малих значень Ньютона при $a = 0$.

З метою не втрати загальності ЗМКР, систему рівнянь (7) розглянемо з урахуванням початкової умови $x_0(t_0) = a$

$$\{a/ct_0 = (\alpha - 1)/(\beta - 1) \& x/ct = (\alpha - 1)/(\beta - 1) \cdot \beta/\alpha, \quad (10)$$

де $\beta = x(t)/x_0(t_0) = x(t)/a, \alpha = t/t_0$.

З системи рівнянь (10) визначаємо параметри

$$\beta = \frac{x(a - ct_0)}{a(x - ct)}, \quad \alpha = \frac{t(a - ct_0)}{t_0(x - ct)}, \quad (11)$$

Оскільки $\beta = x/a$, тому рішенням рівняння (2) буде

$$\text{функція вигляду} \quad x(t) = a + c(t - t_0) \quad (12)$$

Розглянемо рішення системи рівнянь (7) інакше, а саме, у вигляді

$$\begin{cases} \beta = n\alpha - n + 1 \\ \beta = 1/(1 - m + m/\alpha) \end{cases}, \quad \text{де} \quad n = \frac{ct}{a}, \quad m = \frac{ct}{x} \quad (13)$$

Тоді α знаходиться з рівняння вигляду

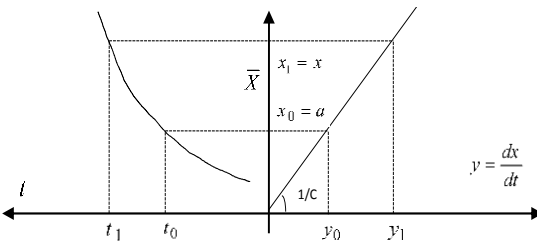
$$\alpha^2 n(1 - m) + \alpha(2nm - n - m) - m(n - 1) = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{2n(1 - m)}{2n(1 - m)} = 1, \quad \text{звідки} \quad \beta_1 = 1 \quad \text{або} \quad \alpha_2 = \frac{m(1 - n)}{n(1 - m)} = 1$$

, звідки $\beta_2 = \frac{1 - n}{1 - m}$, тобто, $x_1(t) = ct$ і $x_2(t) = a$, і загальне рішення рівняння (2) має вигляд

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = ct + a, \quad (14)$$

Розв'язок рівняння (3). Наведемо рівняння (3) в графічному вигляді на рис. 2. Оскільки t_1 і t_0 визначають одну похідну в методі обчислення нескінченно-малих значень, а



їх дві y_0 і y_1 в ЗМКР, то введемо порядок вибору \bar{y} на інтервалі $y_0 \leq y \leq y_1$.

Рис. 2 – Графічне представлення рівняння (3).

Задамо: $\bar{y} = 0,5(y_0 + y_1) = 0,5c(x_0 + x_1) = c\bar{x}$ або $\bar{y} = 0,5cx_0(\beta + 1)$,

$\bar{y} = 0,5cx(1 + 1/\beta)$ і рівняння (3), з урахуванням граничних умов, можна записати у вигляді (інтегро-диференціальної апроксимації)

$$\begin{cases} \frac{x_0(\beta - 1)}{t_0(\alpha - 1)} = c\bar{x} = cx_0 0,5(\beta + 1) \\ \frac{x(1 - 1/\beta)}{t(1 - 1/\alpha)} = c\bar{x} = cx 0,5(1 + 1/\beta) \end{cases} \rightarrow$$

$$\left\{ A_0 \frac{(\beta - 1)}{(\alpha - 1)} = 0,5(\beta + 1), A_0 = \frac{1}{t_0 c}, \right. \quad (15.1)$$

$$\left. A \frac{(\beta - 1)\alpha}{(\alpha - 1)\beta} = 0,5(1 + 1/\beta), A = \frac{1}{tc}, \right. \quad (15.2)$$

З рівнянь (15.1) і (15.2) для $\beta = x(t)/a$, використовуючи систему рівнянь

$$\left\{ \alpha = 1 + 2A_0 \frac{(\beta - 1)}{(\beta + 1)} \quad (16.1) \quad \& \quad \alpha = 1 / \left[1 - 2A \frac{(\beta - 1)}{(\beta + 1)} \right] \quad (16.2), \right.$$

визначаємо $\beta = \frac{2AA_0 + A_0 - A}{2AA_0 - A_0 + A}$, і рішенням буде функція вигляду

$$x(t) = a \frac{2 + ct - ct_0}{2 - ct + ct_0}. \quad (17)$$

Метод обчислення нескінченно малих значень дає $x(t) = ae^{ct}$, а рішення (17) є першим доданком ряду Паде для даної функції.

Розглянемо рішення рівняння (3) ЗМКР на границях інтервалу $y_0 \leq y \leq y_1$.

Для границі y_0 з системи рівнянь

$$\left\{ A_0 \frac{(\beta - 1)}{(\alpha - 1)} = 1 \quad \& \quad A \frac{(\beta - 1)}{(1 - 1/\alpha)} = 1 \right. \text{ визначаємо } \beta = \frac{AA_0 + A_0 - A}{AA_0} \text{ і}$$

знаходимо рішення

$$x(t) = a(1 + ct - ct_0). \quad (18)$$

Для границі y_1 з системи рівнянь

$$\left\{ A_0 \frac{(1-1/\beta)}{(\alpha-1)} = 1 \ \& \ A \frac{(1-1/\beta)}{(1-1/\alpha)} = 1 \right.$$

визначаємо $\beta = \frac{AA_0}{AA_0 - A_0 + A}$ і знаходимо рішення

$$x(t) = a(1 - ct + ct_0)^{-1}. \quad (19)$$

На інтервалі $y_0 \leq y \leq y_1$ існує нескінчена множина функцій $x(t)$.

Знайдемо одне загальне рішення рівняння (3) на інтервалі $y_0 \leq y \leq y_1$ для $\tilde{y} = \tilde{x} \cdot c$ в Евклідовому просторі, див. рис.3.

Задамо $\tilde{x} \in [x_0 \div x_1]$, як $\tilde{x} = x_0(1-n) + nx_1$ і складемо систему рівнянь вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_0(\beta-1)}{t_0(\alpha-1)} = c\tilde{x} = c'x_0(\beta+\tau) \\ \frac{x(1-1/\beta)}{t(1-1/\alpha)} = c\tilde{x} = c'x(1+\tau/\beta) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 + A_0 \frac{(\beta-1)}{(\beta+\tau)} \\ \alpha = 1 / \left[1 - A \frac{(\beta-1)}{(\beta+\tau)} \right] \end{array} \right., \quad (20)$$

де $\tau = \frac{1}{n} - 1$, $c' = cn$, $A = \frac{1}{tc'}$, $A_0 = \frac{1}{t_0c'}$,

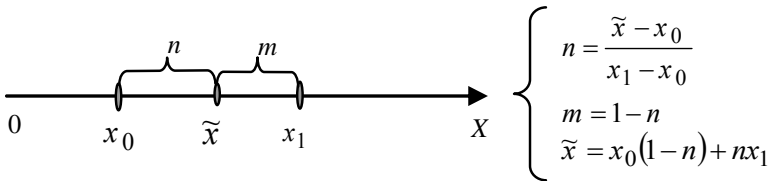


Рис.3 - Схема визначення \tilde{x} .

З системи рівнянь (20) визначаємо $\beta = \frac{AA_0 + \tau(A_0 - A)}{AA_0 - A_0 + A}$.

Оскільки $\beta = \frac{x(t)}{a}$, а $\Delta t = t - t_0$ то

$$\tilde{x}(t) = a \frac{1 + c't\Delta t}{1 - c'\Delta t}, \quad (21)$$

Усунув τ і n з рівняння (21), отримаємо рівняння вигляду

$$\tilde{X}(t) = \tilde{x}^2 - \left(\frac{b-a}{c\Delta t} + 2a \right) \tilde{x} + \left[ab + \frac{a(b-a)}{c\Delta t} \right] = 0, \quad (22)$$

де $x_0 = a$, $x_1 = b$, з якого можна визначати значення параметрів \tilde{x} і c наступними рівняннями

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{c\Delta t} + 2a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{b-a}{c\Delta t} + 2a \right)^2 - \left[ab + \frac{a(b-a)}{c\Delta t} \right]} - \text{пряма задача,} \quad (23)$$

$$c = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{(b-a) \cdot (\tilde{x} + a)}{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}a + ab} - \text{зворотна задача.} \quad (24)$$

Для $c \rightarrow \infty$ рівняння (22) має вигляд

$$\lim_{c \rightarrow \infty} [\tilde{X}(t)] = \tilde{x}^2 - 2a\tilde{x} + ab = 0, \quad (25)$$

$$\text{де } \tilde{x}_{1,2} = a \pm j\sqrt{a(b-a)} = \sqrt{\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2} = \sqrt{ab} \cdot e^{\pm j\varphi}, \quad \varphi = \arctg \sqrt{\frac{b}{a} - 1}.$$

Висновок. 1) ЗМКР при апроксимації безперервної функції надає рівнянням (25) енергоінформаційне [3] (середнєгеометричне) значення функції в середині інтервалу, і точні її значення на заданих границях. 2) ЗМКР визначає значення апроксимованої функції в залежності від заданої і вільної частоти апроксимації. 3) ЗМКР для $c \rightarrow \infty$ надає рішення рівнянь (4), (5) аналогічні (25). 4) Розвиток ЗМКР [4] за фізичними законами дозволить прогнозувати АЧХ якостей руху, що моделюються різними диференціальними, інтегральними і інтегро-диференційними рівняннями.

Посилання.

1. Самарский А. А. Теория разностных схем, учебное пособие, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». – М.: 1977. – 656 с.

2. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. Академия наук Украинской ССР институт кибернетики им. В.М. Глушкова. Наук. думка. – Киев. 1986. – 584 с.

3. Карпенко В. М. Енергоінформаційні аспекти аналізу динаміки фізичної точки у неоднорідному півпросторі / В. М. Карпенко, Ю. П. Стародуб, О. В. Карпенко // Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики. Випуск 9. - Київ. - 2012. – С. 89-116.

Карпенко В. Н. Математична модель загальної геометрії фізичного простору в задачах геофізики / В. М. Карпенко, Ю. П. Стародуб // Геодинаміка №1(8) / 2009, -С. 97-105.

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ НА ОСНОВІ НЕЧІТКИХ АСОЦІАТИВНИХ ПРАВИЛ У ВИВЧЕННІ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ЗМІН МЕТЕОРОЛОГІЧНИХ ДАНИХ ТА СТАНУ ЗЛІТНО-ПОСАДКОВОЇ СМУГИ

Кашель О.Є, Джума Л.М., Піліпюнок О.М.
helen.kashel@gmail.com, ldzhuma@gmail.com,
oksana.pilipyonok@gmail.com

Кіровоградська льотна академія НАУ

Аннотация. В тезисах обосновывается возможность применения метода интеллектуального анализа на основе нечетких ассоциативных правил в поиске и изучении закономерностей изменений метеорологических данных и состояния взлётно-посадочной полосы для интеллектуальной обучающей системы «Диспетчер Tower». Выдвигается гипотеза о возможности использования результата, полученного данным методом, в автоматизации процесса формирования и представления метеорологических элементов и состояния взлётно-посадочной полосы.

Abstract. The thesis substantiates the possibility of applying the method of intellectual analysis based on fuzzy association rules in the search for and studying the patterns of changes in meteorological data and the condition of the runway for the intellectual training system «Tower Controller». A hypothesis is advanced about the possibility of using the result obtained by this method in automating the process of forming and presenting meteorological elements and the condition of the runway.

Управління повітряним рухом (УПР) являє собою складний, багатокомпонентний процес, під час якого авіадиспетчер виконує велику кількість різнопланових завдань в умовах обмеженого часу та інформації.

Обов'язки, що покладені на диспетчера Аеродромної Диспетчерської Вишки (АДВ) Tower, відрізняються особливими параметрами складності та відповідальності, що підтверджується високими показниками інцидентів та авіаційних подій на етапах зльоту та посадки повітряних суден.

Важливим етапом у формуванні надійних знань, вмінь та навичок диспетчера УПР є проходження тренажерної підготовки з виконанням завдань, що максимально наближені до реальних умов.

Підвищити рівень професійної підготовки диспетчера АДВ Tower стає можливим завдяки використанню інтелектуальної навчальної системи (ІНС) «Диспетчер Tower», в основу якої закладено концепцію вивчення, підтримки та контролю процесу прийняття рішення при управлінні злітно-посадковими операціями [1]. Розробка цієї навчальної системи активно ведеться на кафедрі інформаційних технологій КЛА НАУ.

Одним із напрямків розробки ІНС «Диспетчер Tower» є вивчення та виявлення закономірностей змін метеорологічних даних та стану злітно-посадкової смуги (ЗПС) з метою їх використання в автоматизації процесу формування вправ різного рівня складності.

В цілому, розгляд системи обслуговування повітряного руху як відкритої, складної, безперервно-дискретної, стохастичної, динамічної системи управління з мішаною структурою, дає змогу виконувати дослідження даних, що використовуються в процесі прийняття управлінських рішень диспетчером АДВ Tower, із застосуванням комбінаторних знань [2, 3, 4, 5].

Необхідність представлення метеорологічних даних в процесі виконання тренажерних завдань зумовлює використання їх певних комбінацій.

Так система, з якої складається диспетчерський тренажер АДВ, що використовується на базі Навчально-сертифікаційного центру Державного підприємства обслуговування повітряного руху України, може моделювати 999 комбінацій метеорологічних явищ відповідно до будь-якої пори року та часу доби. У заданих інструктором погодних умовах та інтенсивності повітряного руху моделюються різноманітні ситуації, які можуть виникати в роботі.

Одним з перших кроків на шляху розробки ІНС «Диспетчер Tower» у напрямку автоматизованого представлення метеорологічних елементів та стану ЗПС має бути пошук та вибір підходів до систематизації цих даних. Зважаючи на той факт, що метеорологічні показники та явища, а також стан ЗПС, можна характеризувати як об'єкти вивчення, що мають невизначені властивості та властивості нестроого характеру, доцільно проводити дослідження з використанням теорії нечітких множин.

В теорії нечітких множин застосовуються різні види об'єднання, перетину, різниці множин та заперечення. За допомогою операцій над нечіткими множинами можна створювати нечіткі алгоритми, нечіткі бази даних та нечіткі бази знань.

В результаті вивчення існуючих видів аналізу нечітких даних для обробки метеорологічних даних та даних, щодо стану ЗПС, був запропонований метод інтелектуального аналізу на основі нечітких асоціативних правил. Існуючий метод призначений для виявлення взаємозв'язків між наборами даних із статистики. Пошук закономірностей відбувається не на основі властивостей об'єкта, що досліджується, а між декількома подіями, що відбуваються одночасно [6].

Одним із способів зробити алгоритм інтелектуального аналізу асоціативних правил більш «нечітким» є виконання «нарізки» в заданих точках у діапазоні між 0.0 та 1.0, де елементи зі значенням функції приналежності вище рівня відсікання вважаються «чіткими» (що відповідає повній приналежності), а елементи нижче рівня відсікання вважаються елементами без приналежності. Результатом є рівні

достовірності для правил при різних значеннях рівня відсікання у вигляді двомірного графа. Такий розрахунок нечітких асоціативних правил є придатним до об'єктно-орієнтованих форм [7].

Використання методу інтелектуального аналізу на основі нечітких асоціативних правил вимагає, щоб значення приналежності (або функції приналежності) були призначені кожному елементу (або кожному класу елементів) в базі даних. Ці значення приналежності мають бути розраховані за певною формулою. Наприклад, метеорологічне явище «сніг» може бути функцією нечіткої приналежності, заснованої на показниках відносної вологості повітря, зазначених у відсотках, та в той самий час, воно може бути пов'язаним (може асоціюватися) із явищем «завірюха», що, в свою чергу, може бути функцією нечіткої приналежності, заснованої на показниках швидкості вітру, зазначених у метрах за секунду.

Тобто, аналізуючи метеорологічні дані на певній території за певний проміжок часу, враховуючи різні пори року, можна виявити тісні взаємозв'язки між різноманітними метеорологічними елементами, показниками та станом ЗПС. Виявлені закономірності із застосуванням методу інтелектуального аналізу на основі нечітких асоціативних правил мають дати можливість приступити до автоматизації процесу формування та представлення метеорологічних даних та стану ЗПС, що виводяться на інтерфейс користувача ІНС «Диспетчер Tower».

Література

1. Пилипёнок О. Н. Модель процесса принятия решений как основная составляющая интеллектуальной обучающей системы / О. Н. Пилипёнок // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. - 2014. - № 4. - С. 54-61. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nzundiz_2014_4_11.

2. Джума Л.Н. Анализ структуры рабочего места диспетчера Tower и особенности его моделирования / Л.Н. Джума, О.Н. Пилипёнок, А.В. Тимошенко // Матеріали I Міжнар. наук.-практ. конф. «Управління високошвидкісними

рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем». – Кіровоград: КЛА НАУ, 2012. – С. 32-33.

3. Джума Л.Н. Совершенствование модели информационного обеспечения интеллектуальной обучающей системы «Диспетчер Tower» / Л.Н. Джума, О.Н. Пилипёнок // Научные записки Украинского научно-исследовательского института связи. Научно-производственный сборник. – К.: Украинский НИИ связи, 2014. – № 5(33). – С. 48-57.

4. Пилипёнок О.Н. Особенности моделирования условий функционирования диспетчера Tower / О.Н. Пилипёнок // Матеріали XXXII Всеукр. наук.-практ. конф. молодих учених та курсантів «Авіація та космонавтика: стан, досягнення і перспективи». – Кіровоград: КЛА НАУ, 2012. – С. 151-152.

5. Пилипёнок О.Н. Разработка модуля информационной поддержки деятельности авиадиспетчера / О.Н. Пилипёнок // Тези доповідей XII Міжн. наук.-практ. конф. молодих учених і студентів «Політ. Сучасні проблеми науки». – К.: НАУ, 2012. – С. 35

6. Максимова К.И. Поиск ассоциативных правил в статистике покупок товаров / К.И. Максимова // Сборник научных трудов XI Международной конференции студентов и молодых ученых. под редакцией Е.А. Вайтулевич; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. 2014

7. Практический интеллектуальный анализ расплывчатых и неопределенных данных [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://www.ibm.com/developerworks/ru/library/ba-practical-data-mining/>

ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ И ЭВОЛЮЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧАХ О МИНИМАЛЬНОМ ОСТОВНОМ ДЕРЕВЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Козин И. В., Полюга С.И.

ainc00@gmail.com, veta99@mail.ru,

Запорожский национальный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача об остовном дереве в связном взвешенном графе с ограничениями на степень вершины или на радиус дерева. Показано, что рассматриваемые задачи имеют фрагментарную структуру. Построены фрагментарные модели задач и предложен эволюционный алгоритм для поиска приближенного оптимального решения.

Abstract. The paper deals with the spanning tree problem in a connected weighted graph with restrictions on the degree of the vertex or on the radius of the tree. It is shown that the problems under consideration have a fragmentary structure. Fragmentary models of problems are constructed and an evolutionary algorithm is proposed to search for an approximate optimal solution.

Широко известна классическая оптимизационная задача о минимальном остовом дереве в неориентированном взвешенном графе, для поиска оптимального решения которой существует алгоритмы полиномиальной трудоемкости [1].

Однако введение ограничений на максимальную степень вершины или на радиус дерева приводят к NP – полной задаче [1,2]. Известен ряд результатов, связанных с поиском приближенного решения задачи об остовном дереве с ограничением на радиус дерева [3,4].

В настоящей работе приводится новый метод поиска оптимального решения задачи об остовном дереве с ограничениями, основанный на использовании фрагментарной модели.

Пусть задан неориентированный связный граф $G = (V, E)$, ребрам которого приписан неотрицательный вес $\rho: E \rightarrow R_+^1$. Допустимыми решениями будем считать остовные деревья этого графа, у которых степень любой вершины не превосходит заданного числа $k \geq 2$ и радиус дерева не превосходит заданного числа $L > 0$. Задача состоит в

отыскании допустимого решения, вес которого (сумма весов, входящих в это решение ребер) минимален.

Фрагментарной моделью задачи будем называть определенное отображение множества перестановок ребер графа в множество допустимых решений [5]. По перестановке (упорядоченно списку) ребер допустимое решение отыскивается с помощью следующего фрагментарного (жадного) алгоритма.

На начальном этапе множество ребер в строящемся решении пусто. Выбирается первое по списку ребро графа. На очередном шаге алгоритма к выбранному множеству ребер добавляется первое ребро в списке, которое удовлетворяет следующим условиям:

1. Ребро имеет ровно одну общую вершину с уже выбранными ребрами и, следовательно, множество выбранных ребер на каждом шаге алгоритма является деревом.

2. Максимальная степень вершины построенного дерева не превосходит k , а его радиус не превосходит L .

Алгоритм заканчивает работу, когда построено остоное дерево графа или когда очередной шаг алгоритма невозможен.

Легко показать, что предлагаемая модель обладает свойством достижимости в следующем смысле: любое допустимое решение может быть получено путем применения фрагментарного алгоритма при надлежащем выборе перестановки ребер.

Таким образом, задача поиска допустимого решения минимального веса может быть сведена к задаче поиска оптимальной перестановки. Критерием в этой задаче является вес допустимого дерева, которое строится по заданной перестановке ребер.

На следующем этапе для поиска оптимальной перестановки можно применить эволюционный алгоритм на перестановках [6] с геометрическим оператором кроссовера.

Литература

1. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц / –

М.: Мир, 1985. – 512 с.

2. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон ; пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

3. Прим Р. М. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения // Кибернетический сб. М.: Мир, 1961. Вып. 2. С. 95-107.

4. Ерзин А. И. Задача построения остовного дерева максимального веса с ограниченным радиусом // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 27. С. 70-78.

5. Козин И.В. Фрагментарные модели для некоторых экстремальных задач на графах / Козин И.В., Полюга С.И. // Математические машины и системы. – 2014. – № 1. – С. 143 – 150.

6. Козин И.В. Эволюционно-фрагментарная модель задачи упаковки пентамино / И.В. Козин, С.И. Полюга // Дискретный анализ и исследование операций (Россия), 2014, Том 21, № 6. С.35–50.

ЭВОЛЮЦИОННО-ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ НА ГРАФАХ

И.В. Козин, С.Е. Батовский

ainc00@gmail.com, user.sergey.b@gmail.com

Запорожский национальный университет

Аннотация. В данной работе представлено построение фрагментарной модели для задачи о максимальном разрезе на графах, принадлежащей к классу труднорешаемых задач. Для построения используются комбинаторные конфигурации и отображения. В результате была получена возможность нахождения приближённого решения задачи с помощью универсального эволюционно-фрагментарного алгоритма.

Abstract. This article presents the construction of a fragmentary model for the problem of the maximum section on graphs, which belong to the NP-completeness problems. Combinatorial configurations and functions were used by author. As the result, the possibility of finding an approximate solution of the problem through a universal evolution- fragmentary algorithm was obtained.

Рассматривается одна из вариаций NP-полной задачи о максимальном разрезе на графах [1, 2]. По условию задан непланарный граф $G = (V, E)$ в котором каждому ребру поставлено в соответствие неотрицательное число $w(e) \in \mathbb{Z}^+$ – вес ребра. Также, задано некоторое положительное число K . Задача заключается в том, чтобы найти такое разбиение множества V на два непересекающихся множества V_1 и V_2 , чтобы сумма весов рёбер, соединяющих в вершины из множеств V_1 и V_2 , была не менее K .

Известно, что в случае, когда по условию задачи граф является планарным, решение может быть найдено за полиномиальное время [2], в остальных случаях задача относится к классу NP-полных.

Поскольку не существует точных методов решения таких задач, работающих за полиномиальное время, вполне оправданным является применение классов недетерминированных алгоритмов – метаэвристик [3].

Для построения фрагментарной модели вводится конечный алфавит $\Sigma = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где n – количество вершин графа данной задачи, и понятие допустимого слова. Так, слово, состоящее из символов алфавита Σ , называется допустимым, если:

1. Слово состоит из $n + 1$ различных символов.
2. Символ a_0 не является первым или последним в слове.

Вводится следующая теорема.

Теорема 1. Существует отображение, которое ставит в соответствие каждому допустимому слову некоторое разбиение множества вершин графа на два непересекающихся множества.

Действительно, если каждому символу a_i , $i = \overline{1, n}$ из алфавита Σ поставить в соответствие вершину графа, то допустимое слово является разбиением множества всех вершин графа на два непересекающихся множества, с помощью символа a_0 .

Таким образом, становится возможным определение отображения из множества перестановок S_{n+1} в множество действительных чисел, если каждой перестановке символов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, образующей допустимое слово, поставить в

соответствие сумму весов всех рёбер $a_i a_j$, где a_i стоит перед a_0 в перестановке, а a_j – после.

В результате, построенная фрагментарная модель [3] для задачи о максимальном разрезе на графах позволяет применить к ней универсальный эволюционно-фрагментарный алгоритм для получения приближённого решения [4].

Литература

1. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems / R.M. Karp; in R.E. Miller and J.W. Thatcher (eds.) // Complexity of Computer Computations. – New York: Plenum Press. – 1972. – P. 85-103.

2. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон; пер. А. Фридман. – М.: Мир. – 1982. – С. 264.

3. Козин И.В. О свойствах фрагментарных структур / И.В. Козин, С.И. Полюга // Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. – 2012. – № 1. – С. 99-106.

Кривцун Е.В. Эволюционно-фрагментарная модель для множественной задачи коммивояжера / Е.В. Кривцун, И.В. Козин, С.Е. Батовский // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: зб. наук. праць. – Д.: «Ліра». – 2015. – С. 114-115.

ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

Кузьменко О.С.

Kuzimenko12@gmail.com,

Кіровоградська льотна академія
Національного авіаційного університету

Аннотация: В тезисах рассматривается использование графов в процессе изучения физики в высших учебных заведениях технического профиля. Построение и исследование математических моделей важны почти для всех специальных дисциплин. Использование графов для

представления знаний в физике является следствием появления работ по теории искусственного интеллекта, попыткой применить законы деятельности интеллекта к преподаванию физики.

В процессе познания и в стремлении создать детальное описание процессов исследования возникает необходимость строить все более сложные математические модели, которые требуют универсального математического аппарата.

Abstract: The thesis deals with the use of graphs in the process of studying physics in higher educational institutions of a technical profile. The construction and study of mathematical models are important for almost all special disciplines. The use of graphs to represent knowledge in physics is a consequence of the emergence of works on the theory of artificial intelligence, an attempt to apply the laws of the activity of the intellect to the teaching of physics.

In the process of cognition and in an effort to create a detailed description of the research processes, it becomes necessary to build increasingly complex mathematical models that require a universal mathematical apparatus.

Фізика у своєму історичному розвитку перетворювалась із науки емпіричної в науку – теоретичну. Для характеристики різноманітних явищ і процесів, які відбуваються у природі і техніці, фізики все частіше використовують математичні методи або, як прийнято говорити, відповідний математичний апарат.

Для розробки математичних моделей широко використовується диференційне числення, теорія множин, матриці і графи, а також планування експерименту. Відповідно розрізняють теоретико-множинні, матричні, топологічні та поліномні математичні моделі.

Родоначальником теорії графів є Леонард Ейлер, 1736 рік. У XIX і XX графи стали використовуватися при побудові схем електричних ланцюгів і молекулярних схем. Як окрема математична дисципліна теорія графів була вперше представлена в роботі угорського математика Кеніга в 30-ті роки XX століття. В архітектурі можливість застосування графів почали досліджувати в 2004 році (Джон Геро і Джері Цай, Австралія).

Сьогодні сучасні досягнення теорії графів використовуються у різних галузях знань, що підтверджує наукову та практичну значущість цієї проблеми. Багато задач прикладного характеру зводяться до розгляду сукупності

об'єктів, властивості яких описуються зв'язками між ними. В таких випадках зручно дані об'єкти відображати точками, а зв'язки між ними – відрізками прямої чи кривої з кінцями в даних точках. При цьому довжини відрізків і розміщення точок можуть бути довільними.

Зокрема, у фізиці: для побудови схем до розв'язування задач, за допомогою графів значно спрощується розв'язання задач з розділів механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, електродинаміки.

Метою доповіді є формування навичок застосування графів студентами академії при розв'язуванні задач з розділу «Механіка».

Як приклад розглянемо таку задачу.

Оцінити ефективну тягову потужність двигунів літака АН-12 «Руслан», що потрібна для здійснення горизонтального польоту, якщо маса літака становить 390 т, швидкість польоту 800 км/год, аеродинамічна якість 17,8. Аеродинамічною якістю літака називається відношення підіймальної сили до сили лобового опору під час польоту.

При розв'язуванні задачі записується короткий запис відомих величин на дошці. Переводяться усі наявні в умові величини в систему СІ. ($m = 390 \cdot 10^3$ кг; $g = 9,8 \frac{M}{c^2}$; $v = 800 \frac{KM}{год} = 222,2 \frac{M}{c}$). За необхідності зображаємо малюнок (рис.1). Як бачимо на літак під час польоту діють підіймальна сила, сила лобового опору, сила тяги та сила тяжіння.

Запишемо формулу для знаходження потужності двигунів літака:

$$N = \frac{A_{тяг}}{t} \quad (1)$$

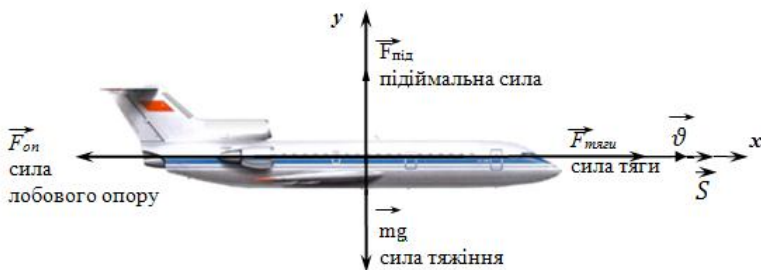


Рисунок 1 Сили, що діють на літак у горизонтальному польоті

$$A_{тяг} = F_{тяги} \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Так як $\cos 0^{\circ} = 1$, то формула набуває вигляду:

$$A_{тяг} = F_{тяги} \cdot S \quad (3)$$

З рисунка 1, можемо зробити висновок, що $F_{\text{дйде}} = F_{\text{ii}}$, а

$$F_{\text{nid}} = mg \quad (4)$$

Силу тяги визначаємо відповідно $k = \frac{F_{\text{nid}}}{F_{\text{on}}}$, так як

$F_{тяг} = F_{\text{on}}$ при $v = \text{const}$.

$$F_{тяг} = mg, \text{ тоді } F_{\text{on}} = \frac{F_{\text{nid}}}{k}, \text{ тоді}$$

$$F_{тяг} = \frac{mg}{k} \quad (5).$$

Підставляємо формулу (5) в (3), врахувавши, що

$$S = v \cdot t \quad (6)$$

і після цього в формулу (1). Остаточо отримаємо робочу формулу для визначення ефективної тягової потужності літака:

$$N = \frac{mgv}{k} \quad (7)$$

Підставивши числові значення отримаємо, що

$$N = 47,7 \text{ МВт.}$$

Використаємо графі для знаходження потужності. Представимо схему наступним чином:

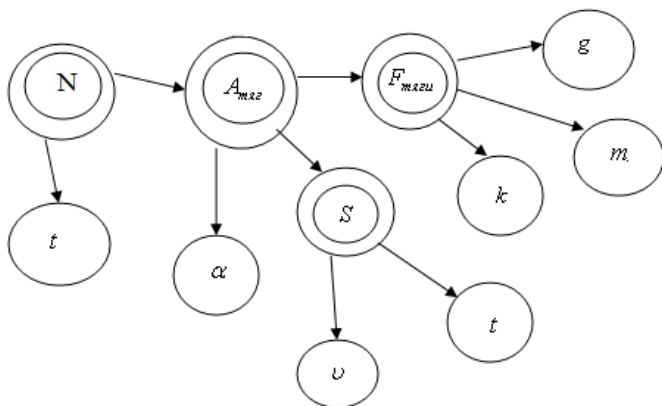


Рисунок 2 Представлення задачі за допомогою графів

Під час підстановки формул (5), (6), (3) в формулу (1), час скоротиться і ми зможемо розрахувати потужність за формулою (7).

Висновки з розгляду задачі та коментарі:

- у механіці поняття потужності використовується як енергетична характеристика сили. У техніці це поняття використовують також і для позначення енергії, що перетворюється на одиницю часу з однієї форми в іншу за допомогою певного пристрою (потужність двигуна, електростанції та ін.).

Література:

1. Берж К. Теорія графів і її застосування / К.Берж. — М.: МУЛ, 1962. — 345с.
2. Подопрігора Н.В. Математичні методи фізики: навчальний посібник [для студ. вищ. навч. закл.]. / Подопрігора Н.В., Трифонова О.М., Садовий М.І. — Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2012. — 300 с.

ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПОЛЬОТУ ПОВІТРЯНОГО СУДНА

Мажаров В.С.

mazharovpp@gmail.com

Кіровоградська льотна академія НАУ

Аннотація. В статті на основі проведеного аналізу існуючих математических моделей динаміки руху повітряних суден сформульовані загальні задачі для розробки системи математического моделювання динаміки польоту повітряних суден. Предложено створити адекватну модель на базі багатофакторного аналізу впливу зовнішнього середовища на систему «Екіпаж - повітряне судно» в очікуваних умовах експлуатації та особливих випадках польоту.

Abstract. The article is based on the analysis of existing mathematical modeling of the aircraft flight dynamics movement molded overall objectives for the development of mathematical simulation of flight dynamics of the aircraft. To create adequate model based on multivariate analysis of the impact of the environment on the system "Crew - aircraft" in anticipated operating conditions and special circumstances of the flight.

Система математического моделювання руху повітряного судна (ПС), яка запропонована для дослідження ефективності льотної експлуатації і рівня безпеки польотів в умовах граничних обмежень.

Під системою математического моделювання руху (СММ) ПС будемо розуміти набір приватних математических моделей (ММ) різних типів літаків, які повинні бути базовими, що дозволяють адекватно описувати весь діапазон можливих маневрів в польоті, які будуються за результатами льотних випробувань (ЛВ), а також на підставі альбому аеродинамічних характеристик конкретних літаків, що пред'являються виробником.

Завдання, що покладаються на ММ руху будь-якого з ПС, складові частини логічного зв'язку, що властиві їй показані на рис. 1 у вигляді загальної структурної схеми робіт по впровадженню математического моделювання в практику ЛВ, яка включає в себе дві самостійні підсистеми, які здійснюють рішення прямих і зворотних; задач динаміки польоту ПС. Структурно підсистеми і всі цикли досліджень з'єднані таким чином, що можуть працювати як автономно з використанням

вихідних даних безпосередньо з ЛВ, так і в комплексі один з одним. Зв'язок між ними відбувається на рівні стикування вхідних і вихідних характеристик. Порядок роботи всіх ланок в схемі визначено заздалегідь, що виходять з структури самої моделі і наявності вихідних даних.

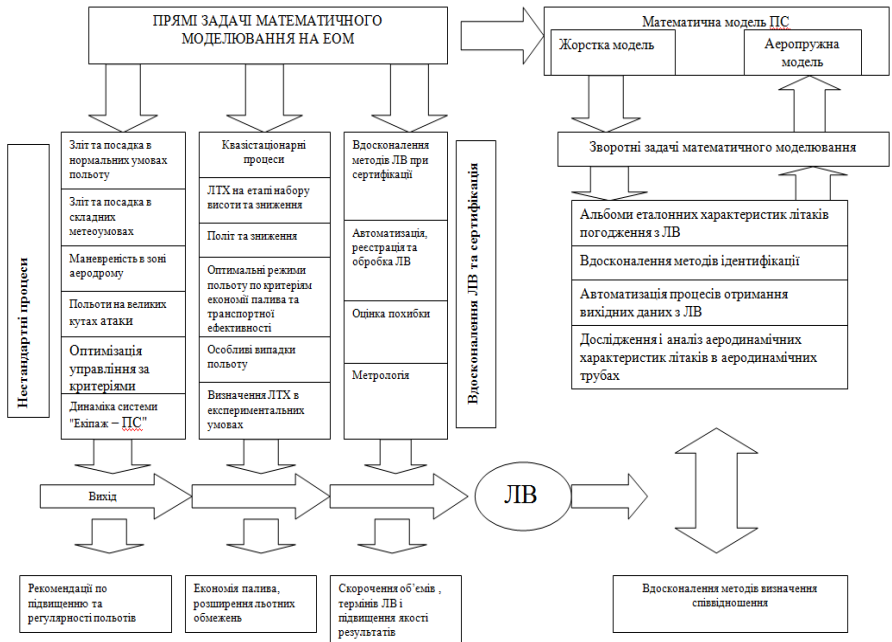


Рис.1. Завдання для математичного моделювання динаміки польоту повітряного судна

Для ефективного застосування системи моделювання необхідно добре знати організацію і всі методи і методики, передбачені в системі. Для кращого розуміння системи моделювання її зручно розділити на дві основні частини - основні блоки і правила їх побудови. Моделювання польоту ПС здійснюється шляхом стикування основних блоків за певними правилами. Оскільки системи моделювання

будуються на базі окремих блоків, то вельми просто замінити будь-який з них на знову розроблений.

В цілому система математичного моделювання повинна давати досить надійний обчислювальний алгоритм розрахунку динаміки руху літака в нормальних і особливих випадках польоту. Тут під словом "надійний" мається на увазі наступне.

По-перше, метод повинен легко реалізовуватися на Електронній обчислювальній машині (ЕОМ), а, по-друге, результати, отримані на основі ММ, повинні добре узгоджуватися з ЛВ.

Під адекватністю ММ розуміється відповідність результатів розрахунків поведінки реального об'єкта в тій мірі, в якій це необхідно для цілей дослідження. Ідентифікація являє собою процес визначення або уточнення параметрів ММ з метою забезпечення необхідного ступеня адекватності. На сучасному рівні вимог до наукових досліджень цю задачу необхідно вирішувати в строго обґрунтованих рамках і в повному обсязі.

Система математичного моделювання, що нині знаходяться в експлуатації дозволяє для будь-якого типу ПС на будь-яких ділянках траєкторії:

- виявити межі безпечних умов польоту; проаналізувати можливі причини льотних пригод;
- оцінити значення зовнішніх експлуатаційних факторів, що не реєструються в конкретних умовах польоту;
- виявити особливості пілотування ПС в різноманітних умовах і розробити рекомендації з льотної експлуатації;
- визначити оптимальне положення органів механізації;
- визначити балансувальні положення органів управління ПС;
- виявити можливості ослаблення льотних обмежень;
- оцінити вплив аеропружності і не стаціонарності;
- оцінити адекватність результатів моделювання даними реальних польотів;
- забезпечити більш високу точність результатів, ніж точність реєстрації параметрів польоту.

За допомогою Системи математичного моделювання динаміки польоту повітряного судна (ДП ПС) планується вирішити ряд прикладних задач для різних типів ПС, узагальнений перелік яких виглядає наступним чином:

1. Вибір оптимальних параметрів і характеристик ПС на стадії його проектування.
2. Сертифікація ПС па стадії випробувань і введення в експлуатацію.
3. Вдосконалення Керівництва з льотної експлуатації даного типу ПС.
4. Розслідування льотних пригод.
5. Оцінка діяльності екіпажу ПС.

Кожна з цих узагальнених задач розпадається на велике коло конкретних практичних питань. Так, наприклад, завданнями першого роду можуть бути завдання вибору оптимального положення закрилків, стабілізатора, розташування стійок шасі, оптимальних траєкторій і т.п. Проблемою розробки даної математичної моделі на теренах СНД займалися багато колективів. Окремі вдалі ММ були розроблені в Центральному аерогідродинамічному інституті (ЦАГІ) (Бюшгенс Г.С., Бюшгенс А.Г., Брагазін В.Ф.) [3].

Серед завдань другого роду можуть бути завдання підтвердження виконання норм льотної придатності за різними параметрами (градієнти набору висоти, стійкість, керованість і т.д.) на різних ділянках траєкторії (зліт, посадка, відхід на друге коло, рух по ЗПС, і т. п.). В Національному авіаційному університеті займалися такі колективи (Касьянов В.А., Ударцев Е.П., Боярський Г.Н., Іщенко С.А.) [4].

До завдань з третьої групи відносяться завдання пошуку оптимальних прийомів пілотування на різних ділянках траєкторії в різноманітних умовах польоту (наприклад, потрапляння в зсув вітру з дощем літака з одним двигуном, що відмовив при заході на посадку). Займалися цими завданнями в Авіаційному комплексі (АК) ім. С.В. Ільюшина (Єгоров В.І., Байкулова Н.І., Круглякова О.В., Васін І.С.) [5,6,7].

Завдання четвертого роду гранично конкретизовані з точки зору реєстрованих в польоті параметрів. Однак найчастіше

цього недостатньо, і для виявлення причин льотних пригод, приходиться відновлювати і погоджувати між собою різні параметри польоту, а також виявляти можливі зовнішні причини, що не реєструються бортовою апаратурою.

Завдання оцінки діяльності екіпажу передбачають вироблення об'єктивної оцінки пілотування на різних етапах польоту на підставі розшифровки і обробки польотної інформації.

Підводячи підсумки аналізу недоліків існуючих методів дослідження підвищення ефективності льотної експлуатації та рівня БП літаків, керованих пілотом та/або автоматичними системами, в різних умовах експлуатації, можна зробити висновок, що вони не дозволяють в повній мірі реалізувати всі переваги математичного моделювання керованого руху літака в рішенні задач льотної експлуатації та потребують удосконалення. Розробка ММ на основі багатофункціонального аналізу систем дозволила б здійснити безперервний науково-технічний супровід ПС протягом всього терміну його служби. При організаційному рішенні цього питання можливе повноцінне і обґрунтоване визначення рівня відповідності льотних характеристик конкретного ПС вимогам льотної придатності в будь-який поточний момент його експлуатації.

СММ ДП ПС буде мати ряд переваг в порівнянні з розробками інших наукових колективів. Такими перевагами є:

1. Повна уніфікація програмного забезпечення математичного моделювання динаміки польоту ПС на базі багатofакторного аналізу.

2. Використання характеристик ПС в уніфікованій формі, максимально наближеної до використовуваної в конструкторських бюро авіаційної промисловості.

3. Моделювання складних взаємодій різних органів управління між собою.

4. Ідентифікація параметрів руху літака в повітрі або на ЗПС, в тому числі визначення початкової точки руху на моделюючому етапі.

5. Оцінка адекватності і точності моделювання руху.

6. Діалоговий режим роботи з СММ ДП ПС, що дозволяє оперативно готувати вхідну інформацію, компонувати програмне забезпечення для проведення конкретного обчислювального експерименту (ОЕ), обробляти і оформляти вихідну інформацію.

7. Використання методів, що виправдали себе на практиці планування, проведення та обробки результатів ОЕ.

Таким чином, підвищення ефективності експлуатації та рівня БП літаків, оснащених різними системами автоматичного управління, в очікуваних умовах експлуатації і особливих випадках польоту, плануємо провести шляхом створення адекватної математичної моделі на базі багатofакторного аналізу системи «екіпаж – повітряне судно». Отже, облік всіх відомих факторів впливу зовнішнього середовища на ПС при побудові ММ ДП ПС є актуальним завданням для подальшого наукового дослідження.

Література

1. Кубланов М.С., Математическое моделирование задач летной эксплуатации воздушных судов на взлете и посадке: монография / М.С. Кубланов. - Москва: РИО МГТУ ГА, 2013. – 270 с.

2. Кубланов М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть I. Моделирование систем и процессов: Учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2004. – 108 с.

3. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Аэродинамика самолета: Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1965. – 352 с.

4. Касьянов В.А., Ударцев Е.П., Войцеховская К.Ф. Методы идентификации в динамике полета воздушных судов. - Киев: Знание, 1981.-24 с.

5. Динамика полета транспортных летательных аппаратов: Учебник для вузов / А.Я. Жуков, В.И. Егоров, А.Л. Ермаков, В.Н. Журавлев, В.Г. Ципенко. Под ред. А.Я. Жукова. – М.: Транспорт, 1996. – 325 с.

6. Обеспечение устойчивости и управляемости воздушного судна при отказах функциональных систем / В.И. Егоров и др. // Безопасность полетов и человеческий фактор в авиации: Тезисы докладов VI Всесоюзной научно-практической конференции. Секция 7.-Л., 1991. – 22 с.

7. Круглякова О.В. Возможности расширения эксплуатационных ограничений самолета на основе математического моделирования динамики полета на больших углах атаки: Дисс. на соискание уч. степ, канд. техн. наук - М., 1992. - 168 с.

ДИСТАНЦІЙНА АНТИМАГІЧНА РОЗМІТКА ГІПЕРКУБА

Неділько С.М., Семенюта М. Ф.

marina_semenyuta@mail.ru,

Кіровоградська льотна академія НАУ

Аннотация. Получено условие существования (a, d) -дистанционной антимагической разметки гиперкуба Q_n . Найдены функциональные зависимости, порождающие этот тип разметки для Q_n . Методом математической индукции доказано, что Q_n является $(2^n+n-1, n-2)$ -дистанционным антимагическим графом.

Abstract. We have obtained the condition for the existence of a (a, d) -distance antimagic labeling of a hypercube Q_n . We found the functional relationships that generate this type of labeling for Q_n and proved by the method of mathematical induction that Q_n is a $(2^n+n-1, n-2)$ - distance antimagic graph.

Останнім часом розмітки графів все частіше становляться об'єктом інтенсивних досліджень [1]. Стимулом до розвитку цього напрямку і накопиченню теоретичних досягнень виступають практичні проблеми з різних сфер діяльності [2-7]. Під розміткою графа $G=(V, E)$ розуміють відображення, що ставить у відповідність елементам графа числа з заданої множини за певним правилом. Розмітку вважають вершинною або реберною, або тотальною в залежності від області визначення. Спосіб обчислення ваги вершини або ребра залежить від типу розмітки. Якщо всі ваги рівні, одержують

магічний тип розмітки, а якщо всі ваги різні – антимагічний. В даній роботі мітки назначаються вершинам і ваги вершин утворюють арифметичну прогресію з першим членом a і різницею d , тому маємо вершинну (a, d) -дистанційну антимагічну розмітку. Вона вперше запропонована в 2012 році С. Арумугамом і Н. Камачі. Дана робота є продовженням робіт [7-11]. В [8] представлені перші загальні результати і сформульовані відкриті проблеми, які частково розв'язані в [7, 9-12]. Характеристика (a, d) -дистанційних антимагічних регулярних графів та ланцюгів, розпочато у [7, 8]. Д. Фрончек довів, що диз'юнктивне об'єднання копій декартового добутку двох повних графів, а також їх доповнення є $(a, 2)$ -дистанційним антимагічним і $(a, 1)$ -дистанційним антимагічним графами, відповідно [7]. Він також показав, що диз'юнктивні копії гіперкуба Q_3 утворюють $(a, 1)$ -дистанційний антимагічний граф. В [10, 11] знайдені умови існування (a, d) -дистанційної антимагічної розмітки циркулянтних графів, графа дружби та одержано теореми, що розширюють сімейство не (a, d) -дистанційних антимагічних графів. Ми пропонуємо розв'язання задачі існування (a, d) -дистанційної антимагічної розмітки гіперкуба (n -мірного куба) Q_n .

Будемо використовувати означення (a, d) -дистанційної антимагічної розмітки, запропоноване С. Арумугамом і Н. Камачі.

Означення [8]. (a, d) -Дистанційною антимагічною розміткою графа $G=(V, E)$ порядку n називається така бієкція $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, що множина всіх ваг вершин утворює арифметичну прогресію $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ з першим членом a і різницею d , де a, d – фіксовані невід'ємні цілі числа, $a \geq 1, d \geq 0$. Граф G , що допускає таку розмітку, називають (a, d) -дистанційним антимагічним графом.

Згідно Ф. Харарі, n -мірний куб Q_n визначається рекурсивно з допомогою декартова добутку графів: $Q_1=K_2$ і $Q_n=K_2 \times Q_{n-1}$. Такий граф має 2^n вершин і $n2^{n-1}$ ребер. Кожну вершину Q_n можна задати n -компонентним бінарним вектором. Тому під n -вимірним кубом Q_n будемо розуміти граф, у якого множина

вершин – множина всіх n -компонентних бінарних векторів, і два такі вектори вважаються суміжними тоді і тільки тоді, коли вони відрізняються тільки в одній компоненті.

В наступній лемі сформульована необхідна умова існування (a, d) -дистанційної антимагічної розмітки графа G , де δ і Δ – його мінімальний і максимальний степені, відповідно.

Лема [8]. Якщо G є (a, d) -дистанційним антимагічним графом порядку n , то

$$d \leq \frac{2n\Delta - \Delta(\Delta - 1) - \delta(\delta + 1)}{2(n - 1)}.$$

З цієї леми одержимо наслідок, що стосується умови існування (a, d) -дистанційної антимагічної розмітки n -мірного куба Q_n .

Наслідок. Якщо Q_n є (a, d) -дистанційним антимагічним графом, то $a > n$, $d < n$.

В результаті доведення наступної теореми, нами знайдені функціональні залежності, що породжують відповідний тип розмітки для Q_n . Доведення теореми проведено методом математичної індукції, при цьому застосовано представлення вершин Q_n відповідними бінарними векторами.

Теорема. n -Мірний куб Q_n є $(2^n + n - 1, n - 2)$ -дистанційним антимагічним графом для будь-якого $n \geq 3$.

Література

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling, Electron // The electronic journal of combinatorics. – 2015. – 18 P. 157-163.
2. Stewart B. M. Magic graphs. // Canad. J. Math. – 1966. – Vol. 18. – P. 1031-1059.
3. Stanley R. Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs. // Duke Math. J.– 1973. – Vol. 40. – P. 607-632.
4. Bloom G.S., Golomb S.W. Numbered complete graphs, unusual rulers and assorted applications. // Theory and applications of graphs, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, New York. – 1978. – Vol. 642 – P. 53-65.

5. Froncek, D. Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games. // Congressus Numerantium. – 2007. – 187. – P. 83-89.

6. Gallian J. A. Ed. Mathematics and Sports. // J. A. Gallian – Mathematical Association of America, 2010. – 338 p.

7. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments. // AKCE Int. J. Graphs Comb. – 2013. – Vol. 10, No. 2. – P. 119-127.

8. Arumugam S., Kamatchi N. On $(a; d)$ -distance antimagic graphs. // Australasian journal of combinatorics. – 2012. – Vol. 54. – P. 279-287.

9. Nalliah M. Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. Thesis. // M. Nalliah. – The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam, 2014.

10. Семенюта М.Ф. Про дистанційну антимагічну розмітку графів. Збірник наукових праць НАУ інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова «Теорія оптимальних рішень». - 2016. – С. 26 - 32.

11. Семенюта М.Ф. (a, d) -дистанційна антимагічна розмітка окремих типів графів. Міжнародний науково-теоретичний журнал інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАУ України «Кібернетика і системний аналіз». - 2016. – С. 135 - 142.

**ГРАФОВА МОДЕЛЬ ПОЦЕСУ ОПТИМІЗАЦІЇ
МАРШРУТУ ЕВАКУАЦІЇ ПОСТРАЖДАЛИХ ВІД МІСЦЬ
ТИМЧАСОВОГО РОЗМІЩЕННЯ ПОСТРАЖДАЛИХ ДО
МІСЦЬ НАДАННЯ СПЕЦІАЛІЗОВАНОЇ МЕДИЧНОЇ
ДОПОМОГИ**

Неділько В.М., Стратонов В.М.

nvn@glau.kr.ua, vadya862@yandex.ru

Кіровоградська Льотна академія НАУ

Аннотация. Работа посвящена актуальной проблеме вынужденных посадок воздушных судов на водную поверхность. Оптимизационная задача решается используя подходы и методы теории графов, а также опираясь

на концепцію «Золотого часа». В роботі розглянуто оптимізацію маршрута евакуації, в частині сухопутної складової.

Abstract. The research discusses the burning problem of aircraft forced landings on water surface. The optimization task is being solved by means of using graph theory approaches and methods, and it is also supported by the "Golden hour" concept. The research discusses the escape route optimization and the land-based component in particular.

Постійний розвиток авіаційної галузі, що виражається у збільшенні кількості польотів пасажирських повітряних суден, потребує приділяти значну увагу організації роботи служби обслуговування повітряного руху, аварійно-рятувальних та пошуково-рятувальних служб під час вимушеної посадки повітряного судна, координацію їх дій з членами екіпажу. При виконанні польотів над значними за площею акваторіями (океани, моря) вірогідність виконання вимушеної посадки на водну поверхню помітно зростає. Акваторії Чорного та Азовського морів, відповідальність за якими лежить на державі Україна – не є виключенням. На сьогодні з аеропортів Борисполя, Харкова, Одеси, Херсона, Кривого Рогу та інших міст відбуваються регулярні рейси над Чорним морем в південному напрямку, інтенсивність яких щорічно зростає з настанням періоду відпусток.

У разі необхідності виконання вимушеної посадки на водну поверхню, своєчасний доступ до інформації про варіанти евакуації на суші дозволить запобіганню значних наслідків. Характеристики рельєфу місцевості, дорожньої інфраструктури, та інфраструктури прибережних міст значно відрізняються. Тому виникає потреба в розробці методів і алгоритмів, що дозволять розрахувати заздалегідь оптимальні маршрути евакуації на суходолі для певної місцевості. Аналіз задач такого роду, показує, що для їх реалізації найчастіше використовують графові моделі.

Дана робота присвячена побудові математичної моделі оптимізації процесу організації евакуації постраждалих з місць тимчасового розміщення постраждалих (МТРП) до медичних закладів. Факторами, що враховуватимуться при розрахунках прийнято «середній час проходження ділянки евакуації» та

«здатність до надання медичної допомоги медичним закладом». Останній пов'язаний з концепцією «Золотої години» [1]. Нами проведена декомпозиція загальної задачі за певними критеріями, на підзадачі меншої розмірності, вибір методу розв'язку для кожної з них і подальший процес узагальнення.

Для забезпечення єдиного інформаційного простору досліджуваної задачі пропонуємо в якості математичної моделі використовувати спеціальний оргграф $G=(V, E)$. Він буде складатися з мережі, на множині ребер якої задано вагова функція. Вершини G поділимо на три типи в залежності від призначення. Оргграф G може бути як односторонньо зв'язним так і незв'язним, так як не є обов'язковим існування шляху між вершинами однакового типу. Якщо деяка пара вершин G , позначимо їх x і y , 1-го (МТРП) або 2-го типу (медичні заклади) взаємно досяжні, то вважаємо, що існують шляхи x - y і y - x на G . Також можлива наявність паралельних дуг, тому в загальному випадку G може бути орієнтованим мультиграфом.

В термінах описаної проблеми оргграф G відображає можливості доставки постраждалих від МТРП до медичних закладів. Для заданого спеціального оргграфа $G=(V, E)$ з реберною ваговою функцією $w: E \rightarrow \mathcal{R}_+$ треба обрати оптимальний шлях від кожної вершини 1-го типу до вершин 2-го типу, врахувавши додаткову інформацію, накладену на вершини G . Можна виділити два підходи до формулювання задачі:

- пошук оптимального шляху для моделі залежної від часу;
- пошук оптимального шляху для моделі залежної від пропускної здатності, яка пов'язана з впливом навколишнього середовища.

В даній роботі реалізовано перший підхід. Розв'язання задачі можна поділити на три етапи:

- 1) пошук найкоротшого шляху від кожної вершини 1-го рівня до вершин 2-го рівня на транспортній мережі G ;

- 2) вибір способів врахування здатності надання медичної допомоги в необхідному обсязі;

- 3) вибір оптимального плану на мережі G з урахуванням додаткових умов, накладених на мережу в пункті 2.

За вагу ребра G беремо середній час пересування на даній ділянці відповідної дороги. Розіб'ємо G на такі орієнтовані підграфи $G_i=(V'_i, E'_i)$, $i=1, 2, \dots, k$, що $V'_i=\{v^1_i\} \cup V'_{1,i} \cup V'_{2,i} \cup U'_i$, де $V'_{1,i} \subseteq V_1 - \{v^1_i\}$, $V'_{2,i}$ – множина потужності s , $s \leq n$ і $V'_{2,i} \subseteq V_2$. Елементами множини E'_i є ті дуги G , які належать маршрутам з v^1_i до кожної вершин з $V'_{2,i}$. U'_i – множина проміжних вершин, що інцидентні відповідним дугам з E'_i . Всі вершини з $V'_{2,i}$ в орграфі G_i досяжні з вершини v^1_i і кожен G_i не містить контури від'ємної довжини. Півстепінь заходу для вершини v^1_i в G_i дорівнює нулю.

Для пошук найкоротшого шляху від кожної вершини 1-го рівня до вершин 2-го рівня на транспортній мережі G використовуємо алгоритм Дейкстри. Його застосуємо до кожного графа G_i , де $i=1, 2, \dots, k$ і G_i – зв'язний граф. Під час роботи алгоритму на G_i , коли знаходимо найкоротший шлях до будь-якої вершини $v^2_j \in V'_{2,i}$ від початкової вершини v^1_i , його довжину заносимо в масив B_i , а сам шлях у вигляді скінченої послідовності вершин, через які він пролягає, зберігаємо в окремому масиві. На виході для кожного i сформується масив $B_i=(b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$, де b_{ij} – довжина мінімального шляху на G_i від певної вершини v^1_i до вершини $v^2_j \in V'_{2,i}$, $j=1, 2, \dots, s$, $s \leq n$, $i=1, 2, \dots, k$. Приймаємо $b_{ij}=\infty$, коли $v^2_j \notin V'_{2,i}$. Для розглянутої задачі про евакуацію, b_{ij} – найменший середній час, проходження відповідного маршруту, в хвилинах.

Реалізація 2-го етапу дає змогу оцінити шанси вижити для постраждалих. Знайдемо кількість людей, які доставлені живими за час b_{ij} від i -го до j -го пунктів відповідної транспортної мережі. Обчислення проведемо згідно концепції «золотої години». Розіб'ємо час на періоди: перший період триває 15 хвилин, всі інші – 20 хвилин. Ймовірність настання смерті в перший період, коли $0 < b_{ij} \leq 15$, дорівнює 50%. Для наступних періодів одержимо формулу: $42,5\% \cdot 0,85^{p-2}$ – відсоток постраждалих, що вижили в p -й період, де $p=2, 3, 4, \dots$

Вибір оптимального плану евакуації здійснюємо на 3-му етапі, співставляючи найкоротший за часом шляху з i -го МТРП

до j -го медичного закладу і відсоток постраждалих, що вижили за цей час.

Розрахунок оптимального часу евакуації постраждалих, з врахуванням додаткових умов транспортування, дозволить скоординувати дії екіпажу повітряного судна та наземної служби порятунку, а також зменшити кількість загиблих.

Література

1. Шумада И. В. Совершенствование медицинской помощи пострадавшим в результате дорожно-транспортных происшествий на догоспитальном этапе / И. В. Шумада, А. И. Процык. // Ортопедическая травматология. – 1987. – С. 41–44.

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРА.

В. І. Петренюк, Д. А. Петренюк,

*Центральноукраїнський національний технічний
університет, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
НАН України.*

Аннотация. Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 8-ми та 9-ти вершинах, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи із кількома додатковими ребрами) та квазізірки K із центральним графом M з щонайбільше чотирма вершинами. Основний результат: алгоритм побудови всіх 8-вершинних графів-обструкцій для тора.

Основні визначення та поняття взяті із [1]. Позначення 1. Під квазізіркою $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ з центром графом G_1 будемо розуміти об'єднання графа G_1 , $G_1 = (\{v_i\}_{i=1}^3)$, та трьох зірок $St_{n_i}(v_i)$ із висячими вершинами $\{g_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ і ребрами в кількості n_i , які можуть мати спільні кінцеві вершини, та із центральними

вершинами v_i , що породжують підграф G_1 графа G . В подальшому вважатимемо, що $G \setminus \bigcup_{i=1}^3 (St_{n_i}^1(G_1) \setminus G_1) \setminus G_1$ - 2-зв'язний підграф графа G .

Позначення 2. Будемо називати трикутним променем квазізірки $St_n(G_1)$ з центром-графом G_1 її підграф K_3 утворений з одного ребра графа G_1 та двох суміжних йому ребер із множини $St_n^1(G_1) \setminus G_1$ зі спільною вершиною степеня 2. Відмітимо, що такий трикутний промінь символізує приєднання довільної точки ребра до вершини.

Задача. Відшукати ефективний алгоритм побудови 8-ми вершинних графів-обструкцій для тору з метою використання в 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору. Для цього, як наведено в [2], із кількох скінчених простих графів-обструкцій обмеженого ейлерового роду G_i роду $\gamma(G_i)$, де $i=1,2,..k$, побудуємо новий граф G , $G=(G^0, G^1)$, без вершин степеня 2 та із обмеженням роду $\gamma(G)$ певною верхньою величиною, кожне ребро якого є суттєвим відносно роду при операції видалення чи стискання ребра, тобто для довільного ребра $u \in G^1$ виконується рівність $\gamma(G \setminus u) = \gamma(G) - 1$.

Твердження 1. Два трикутні промені квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ 2-зв'язного графа G утворені з одного ребра e та двох пар (e_i, e_j) суміжних йому ребер з множини $St_{n_1, n_2, n_3}^1(G_1) \setminus G_1$ з двома спільними вершинами степені 2, що належать зв'язному підграфу $G \setminus St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$, породжують підграф гомеоморфний K_4 .

Відмітимо, що два трикутні промені символізують приєднання довільної точки грані, на границі якої лежать два суміжні ребра, до вершини.

Твердження 2. Три трикутні промені квазізірки $St_{n_1, n_2, n_3}(G_1)$ 2-зв'язного графа G утворені з пари вершин u, v та трьох пар ребер (e_{i1}, e_{i2}) , $\{e_{i1}, e_{i2}\} \subset St_{n_1, n_2, n_3}^1(G_1) \setminus G_1$, $i=1,2,3$,

інцидентних вершинам u, v та із попарно спільними вершинами v_i , що належать підграфу $G \setminus St_n^1(G_1)$, породжують на множині вершин $\{u, v\} \cup \{v_i\}_{i=1}^3$ підграф: гомеоморфний: або $K_{2,3}$, якщо u, v несуміжні, або K_4 , якщо u, v суміжні вершини графа G та якась пара з $\{v_i\}_{i=1}^3$ вершини графа G , або K_5 , чи $K_5 \setminus e$, якщо u, v та дві чи всі пари з множини $\{v_i\}_{i=1}^3$ є суміжними вершинами графа G .

Наслідок 1. Для побудови графа G , $G \in \{B_1, B_2, B_3\}$, де B_i - неізоморфна 8-ми вершинна граф-обструкція для тору, поданого як ϕ -образ графа K_5 та квазізірки з центром H та підмножини M точок їх приєднання, є наступний **алгоритм 1**:

Крок 0. Вважатимемо заданою множиную всіх неізоморфних вкладень графів K_5 , $K_{3,3}$ в тор. Вибираємо квазізірку H з множини варіантів з центром із трьох вершин та висячими ребрами, що утворюють кінцевими вершинами множиную точок приєднання M' , та множиную M'' складену з копій точок приєднання графа K до графа H . де K гомеоморфний графові з множини $\{K_{3,3}, K_5\}$. Також задані наступні процедури:

1) Побудова $f(H)$ розміщення графа H в середині заданої клітки $s, s \in \sigma_1 \setminus f(H)$, яке допускатиме перехрещення ребер у внутрішніх точках та розташовує пари точок (m', m'') , де $m' \in M'$, $m'' \in M''$, як досяжні в заданому порядку ототодження пар (m', m'') , т.то при ототоженні цих пар висячі ребра не мають схрещуватися додатково ;

2) Розведення одного ребра із пари (e', e'') зхрещених ребер графа $f(H)$ в різні боки завдяки наявності двостороннього доступу у обох його кінцевих точках;

3) Обчислення кількості клітин графа та перевірки значення орієнтовного роду графа по формулі Ейлера за допомогою заданого вкладення в 2-тор без перетину ребер у внутрішніх точках.

Крок 1. Якщо граф H має ребро e , то задовольняє одній із наступних умов а), б), в):

а) Ребро e , $e = (a, b)$, разом з деякими висячими ребрами квазізірки та графа K_5 породжує, принаймні, один мінімальний за включенням підграф графа G гомеоморфний K_4 . Кількість всіх таких підграфів позначимо через $n(e)$.

б) Ребро e , $e = (a, b)$, разом із деякими висячим ребрам квазізірки та графа K_5 породжує мінімальний за включенням підграф не гомеоморфний K_4 , але гомеоморфний колесу чи напівколесу з центром в a чи b , наприклад, $K_4 \setminus e$, W_3 , C_4 та іншим графам. Відмітимо, що на ребрах вказаних вище графів утворюватиметься перешкода 2-доступу до хоча б однієї з кінцевих вершин пари ребер, що перехрещуються на площині клітки s тора, до однієї з вершин приєднання графа K до висячого ребра квазізірки H з центром із трьох вершин. Кількість таких підграфів позначимо через $m(e)$.

в) Ребро e , $e = (a, b)$, не породжує з висячими ребрами квазізірки та графа K_5 ніяких інших мінімальних за включенням зв'язних підграфів графа G , окрім згаданих в умовах а) та б).

Відмітимо наступне: 1) наявність породженого деяким ребром e графа H підграфа графа G гомеоморфного $K_4 \setminus e$, означатиме наявність породженого іншим ребром u графа H підграфа гомеоморфного K_4 , та квазізірка із центром H графа має ребро у якого одна з кінцевих вершин має 2-доступ на торі, 2) одне з двох зхрещених на площині ребер підграфа гомеоморфного K_4 матиме кінцеву вершину, що ототожнюватиметься із вершиною графа гомеоморфного K_5 із 2-доступом на торі.

Перебираємо кожне ребро графа H та накопичимо n , m ,
$$n = \sum_{\forall e, e \in H} n(e), \quad m = \sum_{\forall e, e \in H} m(e).$$

Крок 2. Якщо кількість різних підграфів гомеоморфних K_4 на 1 більше числа вершин з M -множини приєднання із 2-доступом на торі до K_5 , до яких ототожнюють кінцеву

вершину того ребра, що схрещується на площині з іншим ребром з K_4 , то граф G матиме рід 2, інакше виводимо “граф G матиме рід 1” та переходимо на крок 0.

Крок 3. Якщо ребер в H немає, то приєднуємо дві прості зірки $St_5(1)$, $St_5(2)$ до всіх вершин з K_5 із 2-кратним доступом, а $St_5(3)e$ до чотирьох вершин з K_5 , а кінцеві вершини ребра e матимуть на торі число досяжності 2.

Крок 4. Перевіряємо кожне висяче ребро u квазізірки $St_M(H, K_5)$ чи суттєве воно відносно роду 2 шляхом стягнення його в точку та визначення роду отриманого графа G_u . Якщо ребро суттєве відносно роду 2, тобто рід $\gamma(G_u)$ отриманого графа дорівнює 2, то залишаємо ребро в первісному виді, інакше $G := G_u$, т.то залишаємо ребро u графа стягнутим в точку. Перевіривши всі ребра графа G виводимо: “граф G із стиснутими в точку несуттєвими ребрами є граф-обструкцією для тора”.

Кінець алгоритму.

Висновок. Алгоритм 1 коректно будує 8-ми вершинні графи-обструкції для тора за обмежений час

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, – 1971, – 378с.
2. Гермак В.С., Петренюк В.І. Структура 8-ми вершинних графов-обструкцій для тора. Матеріали XVIII Міжнародного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» г. Кіровоград, –15–16 квітня 2016 р. , с. 36-43

ПІДСТАВИ ДЛЯ СУМНІВІВ У ГРАЦІОЗНОСТІ ВСІХ ДЕРЕВ

Петренюк Д.А.

guitar-player@meta.ua

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Гіпотеза про граціозність дерев є однією з найпопулярніших математичних гіпотез. Ця гіпотеза, як і значна частина методів нумерації графа, своєю появою завдячує методів, введеному А. Росою [1] в 1967 році. Гіпотеза полягає в тому, що всі дерева допускають граціозну нумерацію, тобто таку нумерацію вершин дерева порядку n натуральними числами $1, 2, 3, \dots, n$, при якій різниці номерів кінців ребер утворюють ряд натуральних чисел $1, 2, 3, \dots, n-1$ без повторень.

Існує два основних підходи до розв'язання проблеми істинності гіпотези про граціозність дерев. Перший з них полягає в доведенні граціозності та отриманні алгоритмів граціозної нумерації для окремих класів дерев. Якби вдалося продемонструвати граціозність усіх можливих класів дерев, то гіпотезу було б доведено. На сьогодні граціозність доведено для зірок, ланцюгів, гусениць, оливкових дерев, деяких підкласів омарів (фесверків, (2,2)-гусениць, омарів з досконалими паросполученнями), бананових та узагальнених бананових дерев та низки інших класів дерев. Знайдено значну кількість методів поєднання кількох граціозних дерев для отримання більшого граціозного дерева.

Інший підхід до відповіді на питання про граціозність усіх дерев полягає у використанні комп'ютера для перевірки граціозності дерев, кількість вершин яких не перевищує заданої скінченної величини. Такий підхід є додатковим джерелом алгоритмів граціозної нумерації дерев, а також може бути використаний для спростування гіпотези, якщо буде знайдено хоча б одне дерево, яке не допускає граціозної нумерації. Досі, щоправда, такого дерева не знайдено. У 2010 році Фанг використав детермінований алгоритм пошуку з поверненням і

довів, що всі дерева, які мають не більше 35 вершин, граціозні [2].

Обидва підходи до вивчення гіпотези про граціозність дерев досі давали лише підтвердження гіпотези. Проте деякі дослідники висловлюють серйозні сумніви щодо її вірності.

Зокрема, А. Вієтрі [3] зауважує, що переважну більшість методів побудови граціозної нумерації було розроблено для дерев, які мають певні риси регулярності (зірки, симетричні дерева) або характеризуються досить простою структурою (гусениці, феєрверки), в той же час повністю відсутні докази граціозності у випадках достатньо нерегулярних дерев (навіть граціозність усіх омарів ще досі не доведено).

Деякі дослідники вважають найбільшою перешкодою в доведенні гіпотези про граціозність дерев відсутність властивості 0-обертальності у деяких дерев. Дерево називають 0-обертальним, якщо для будь-якої вершини в даному дереві існує граціозна нумерація, у якій ця вершина отримує номер 1. Якби будь-яка вершина будь-якого дерева могла отримати 1 при граціозній нумерації, це дало б змогу генерувати граціозні нумерації для довільних дерев за допомогою простого кроку індукції – додати нову вершину до попередньо занумерованого дерева, присвоїти їй номер n та з'єднати її ребром з вершиною, що має номер 1. Найменше дерево, яке не є 0-обертальним, показано на рис. 1. Вершину, якій в цьому дереві не можна присвоїти номер 1, на малюнку позначено v .

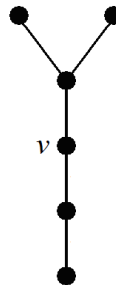


Рис. 1. Приклад гусениці, що не є 0-обертальною

Серед ефективних шляхів критики гіпотези можна назвати аналіз усіх можливих граціозних нумерацій деяких граціозних дерев, що дав би можливість оцінити вплив структури дерева на можливі номери його вершин. На думку Віетрі, деякі дерева зі складною будовою можуть накладати настільки серйозні обмеження на нумерацію вершин, що граціозність цих дерев буде поставлено під сумнів [3]. Хоча знаходження граціозних нумерацій для усіх дерев з кількістю вершин до 35 включно визнається вагомим аргументом на користь правдивості гіпотези, але цей факт ніяким чином не виключає можливості існування неграціозних дерев, що мають більше ніж 35 вершин.

Так чи інакше, сьогодні ще рано говорити про повне доведення або спростування гіпотези про граціозність дерев, незважаючи на те, що з часу її появи минуло майже півстоліття. Втім, переважна більшість дослідників досі схиляється до віри в справедливість гіпотези, беручи до уваги граціозність багатьох класів дерев, результати комп'ютерного пошуку та повну відсутність контрприкладів. Як дотепно зауважив один дослідник, «віра в справедливість гіпотези про граціозність дерев настільки сильна, що, якби навіть було насправді знайдено дерево, яке не допускає граціозної нумерації, його, скоріше за все, не визнали б деревом» [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Rosa, On certain valuations of the vertices of a graph, Theory of Graphs (Internat. Sympos. Rome, 1966) pp. 349-355. Eds. Gordon and Breach, New York; Dunod, Paris, 1967.
2. Fang W. A computational approach to the graceful tree conjecture [Електронний ресурс]. — Access Mode: arXiv:1003.3045v2 [cs.DM]
3. Vietri A. Sailing towards, and then against, the Graceful Tree Conjecture: some promiscuous results // Bulletin of the ICA. 2008. Vol 53, May. P. 31–46.
4. M. Alfalayleh, L. Brankovic, H. Giggins, M.Z. Islam. Towards The Graceful Tree Conjecture: A survey // In: Proceed. AWOCA2004, 7-9 July, Ballina, Austrtalia (2004).

ТОПОЛОГИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ

В.А. Романов

vladimir-romanov@mail.ru

Кировоградский государственный педагогический университет

Аннотация. В пространствах геометрических конфигураций введены туннельная, разностная и сетевая топологии, а также введены понятия индекса поверхности, радиусного и среднегеометрического индексов. Исследовано, в каких из этих пространств являются непрерывными упомянутые индексы, а также исследованы такие выпуклые многогранники, которые являются экстремальными элементами для среднегеометрического индекса.

Abstract. In spaces of geometrical configurations it are introduced the tunnel, difference and net topologies and also it are introduced the notions of the surface, radius and geometrical mean indexes. It are investigated for what of these spaces the mentioned indexes are continuous and also it are investigated such convex polyhedrons that are extreme elements of geometrical mean index.

Пусть X - пространство трёхмерных геометрических конфигураций, представляющих собой такие непустые компакты, которые совпадают с замыканиями открытых связных множеств со связной кусочно-гладкой поверхностью, U - его подпространство, состоящее из компактов с дополнительным условием их выпуклости.

Определение 1. *Туннельным расстоянием* между двумя компактами назовём минимум расстояний между парами точек, взятыми по одной в каждом, *разностным расстоянием* - объём их симметрической разности, *сетевым расстоянием* - минимум таких положительных чисел T , для которых каждый из компактов служит T -сетью другого.

Каждое из упомянутых расстояний порождает *топологию с соответствующим названием*.

Определение 2. *Индексом поверхности* компакта A назовём частное от деления площади его поверхности на кубический корень из квадрата объёма компакта, *радиусным индексом* - частное от деления максимального радиуса содержащегося в A шара на кубический корень из объёма

компакта, *среднегеометрическим индексом* - среднее геометрическое двух предыдущих индексов.

Замечание 1. Ясно, что все три введённых индекса инвариантны относительно гомотетий и что единственным (с точностью до гомотетий) экстремальным элементом первых двух является шар. Как будет видно из теоремы 3, для среднегеометрического индекса экстремальный элемент уже не единственен.

Теорема 1. *В конфигурационном пространстве U индекс поверхности, радиусный и среднегеометрический индексы непрерывны относительно разностной и сетевой топологий, но не имеют свойства непрерывности относительно туннельной топологии.*

Теорема 2. *В конфигурационном пространстве X все три упоминаемых в теореме 1 индекса не имеют свойства непрерывности относительно любой из упоминаемых в указанной теореме топологий.*

Теорема 3. *Множество значений среднегеометрического индекса на элементах конфигурационного пространства U совпадает с полуинтервалом $(1; \sqrt{3}]$, причём для каждого выпуклого многогранника его принадлежность к экстремальным элементам этого индекса равносильна существованию вписанной в него сферы.*

Замечание 2. В семейство экстремальных элементов среднегеометрического индекса входят и компакты, отличные от многогранников и от шара - например, круговой цилиндр, высота которого вдвое больше радиуса основания.

Замечание 3. Если E - евклидово пространство конечной (пусть и очень большой) размерности, то и тогда для геометрических конфигураций в E можно ввести индексы, инвариантные относительно гомотетий, причём для этих индексов будут справедливыми аналоги теорем 1, 2 и 3. Если же пространство E бесконечномерное, то его можно наделять введённой в работе [1] H -непрерывной мерой, которая заменит отсутствующий в таком пространстве объём. Это позволяет ввести для множеств с непустой внутренностью (теперь не для компактов) понятие радиусного индекса,

порождённого упомянутой мерой, причём этот индекс будет непрерывным уже не относительно аналогов соответствующих топологий, а лишь по направлениям из подпространства N пространства E .

Замечание 4. Радиусный индекс важен для структурных элементов капиллярной системы, так как диаметр самых узких капилляров человека равен всего лишь 8-10 мкм, а диаметр эритроцитов (они имеют форму двояковогнутого диска) не намного меньше - 7,5 мкм. Поэтому сопоставление результатов теорем 1 и 2 позволяет прийти к выводу, что при нарушении выпуклости отдельных участков капилляров возможно резкое уменьшение пропускной способности капиллярной системы в целом.

Замечание 5. Для оценки эффективности капиллярной системы из трёх введённых топологий лучше других подходит сетевая, для определения скорости газообмена в альвеолах - сетевая и туннельная, а для исследования метаболических процессов (углеводно-энергетических преобразований, липидного и белкового обменов) - разностная и сетевая.

ЛИТЕРАТУРА

Романов В.А. О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах // Доклады АН СССР. - 1976. - 227, № 3. - С. 569-570.

ДИАГНОСТИКА ЛИТЕЙНЫХ ДЕФЕКТОВ

Самарай В.П. samaraj@ukr.net

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского”

По данным литературы и, исходя из собственных наблюдений, анализ, контроль и обработка текущей технологической или экспериментальной информации (параметров технологического процесса), данных брака форм, стержней и отливок всегда занимает значительную часть

рабочего времени технолога, мастера и исследователя (свыше 40 %). Оставшееся время используется для проектирования новых технологических процессов. Наиболее прогрессивным методом анализа имеющейся информации, получения новых знаний, изучения сущности и связи различных явлений и процессов, усиления творческой стороны деятельности технолога или ученого-исследователя является системный подход, т.е. комплексное использование имитационного или математического моделирования, экспертных систем, систем управления базами данных (СУБД), приемов и элементов САПР. Кроме того, в случае их активного использования значительно увеличивается точность и достоверность, сокращается время обработки результатов научных и производственных исследований.

Для использования современных информационных систем (ИС), информационно-вычислительных систем (ИВС) и информационно-поисковых систем (ИПС) при решении **задач оптимизации, имитационного моделирования, управления, регулирования уплотнения форм и стержней, анализа, прогнозирования** литейных дефектов по вине формы или стержня **и наоборот - диагностики** состояния литейной формы по статистике процента брака необходимо:

1) изучить характеристики и существующие потоки научно-прикладной, обзорной, статистической, технологической и производственной информации;

2) разработать новую структуру информационных потоков с учетом ее компьютерной обработки в рамках ИС, ПК или автоматизированного рабочего места (АРМ);

3) выбрать эффективные процедуры обработки информации;

4) разработать организационное, методическое, алгоритмическое и программное обеспечение для реализации процедур обработки информации на ЭВМ.

С целью получения и накопления литературных данных и данных собственных исследований, их анализа и синтеза на их основе оптимальных технологических процессов уплотнения литейных форм и стержней разработана концепция построения,

а также методическое, алгоритмическое и программное обеспечение программного комплекса (ПК) как многофункциональной интегрированной ИС для **решения обратной задачи моделирования**, т.е. для диагностики характера и степени уплотнения формы или стержня по дефектному состоянию отливок (Таблица 1).

Таблица 1

Переопределенная матрица диагностических коэффициентов с сокращенным количеством переменных

		Матрица коэффициентов (значимость факторов)							Свободные члены
	Дефекты	Плотность околомоделльная	Неравномерность околомоделльной плотности	Верхняя плотность	Распр.пл.от разьема			Средняя плотность	(Процент брака)
					Повышение	Равно-мерно	Понижение		
1	Нет брака	3	0	3	0	2	3	3	14*Нетбрака(%) / 100
2	Прорыв	-2	0	0	0	0	0	-3	5*Прорыв(%) / 10-5
3	Распор	-3	0	0	0	0	1	-3	7*Распор(%) / 100-6
4	Размыв	-3	0	0	0	0	0	-3	6*Размыв(%) / 10-6
5	Утечка	-3	0	0	0	0	0	-2	5*Утечка(%) / 100-5
6	Пригар	-3	0	0	0	0	0	-1	4*Пригар(%) / 100-4
7	Шероховатость	-3	3	0	0	0	0	-5	11*Шерох(%) / 100-8
8	Ужимина	-3	3	0	0	1	1	-2	10*Ужимина(%) / 100-5
9	Засор	-2	0	0	1	0	0	-3	6*Засор(%) / 100-5
10	Обвал	-3	0	0	0	0	0	-3	6*Обвал(%) / 100-6
11	Складчатость	-3	1	0	0	0	0	-2	6*Складчат(%) / 100-5
12	Нарост	-3	0	0	0	0	0	-3	6*Нарост(%) / 100-6

13	Горячие трещины	-2	0	0	0	1	0	-3	6*Горяч.Тр(%) /100-5
14	Газовые раковины	-1	3	-3	3	1	0	-3	14*Газ.Рак(%) /100-7
15	Просечка	-3	0	0	0	0	0	-2	5*Просечка(%) /100-5

ДИАГНОСТИКА КАЧЕСТВА УПЛОТНЕНИЯ ФОРМ И СТЕРЖНЕЙ ПО ДЕФЕКТНОМУ СОСТОЯНИЮ ОТЛИВОК

Самарай В.П. samaraj@ukr.net

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского”

В условиях массового производства отливок основным инструментом анализа качества и оптимальности технологического процесса уплотнения форм и стержней являются данные о параметрах уплотнения, о свойствах формовочных и стержневых смесей, о геометрических характеристиках модельно-опочной и стержневой оснастки, результаты текущего контроля качества литья, данные по разбраковке отливок за смену и более крупные периоды времени. Кроме того, используется информация, отражающая состав и характеристики исходных материалов, состав исполнителей, состояние технологического оборудования. Вся информация обычно отражается в специальных носителях - технологических картах, актах, сводках, фиксируется в специальных журналах учета. Такая информация носит качественный и количественный характер, может быть формализована, при этом обработка ее может быть реализована на ЭВМ без особых затруднений.

Ниже представлена табличная форма модели и системы диагностики плотности формы по статистике процента брака отливок (таблица 1).

Преимущества компьютерной обработки научно-исследовательской и производственно-технической информации перед традиционными методами сводятся к следующему:

- 1) объем перерабатываемых данных может быть любым целесообразным по времени и для всей номенклатуры выпускаемых отливок;
- 2) большая скорость переработки информации;
- 3) возможность использования разнообразных математико-статистических методов для определения степени зависимости между разнообразными факторами;
- 4) новые возможности для проверки и испытания различных гипотез технологического характера и качества форм, стержней и отливок, связанные с возможностью обработки данных в диалоговом режиме на ЭВМ;
- 5) возможность создания информационных систем или, так называемых, АРМ на основе ПК, имеющих в составе различные программные блоки с разными функциями, которые могут использоваться автономно или поэтапно, но при этом связанные между собой программно и информационно и, имеющие целью работы консолидированно (комплексно);
- 6) возможность многовариантного анализа;
- 7) возможность оптимизации.

Указанные преимущества машинной обработки информации в сочетании с возможностью использования таких алгоритмических методов как **оптимизация, имитационное моделирование, прогнозирование и диагностика** с помощью экспертных систем, **приемы и элементы САПР, сохранение, систематизация и поиск любой сложности** средствами СУБД позволяют использовать их и алгоритмизацию на базе них в качестве основы для эффективной автоматизации работы технолога-литейщика или ученого-исследователя по совершенствованию технологических процессов уплотнения форм и стержней и исследованию сущности и связи явлений, происходящих в их течении и результате, в частности, связи (корреляции) с получением качественных отливок либо

проявлением различных видов брака по вине формы или стержня.

Таблица 1

**Квадратная или переопределенная матрица
диагностических коэффициентов с полным или
сокращенным количеством переменных (А) m=12 n=12 или
m=15 n=12**

		Матрица коэффициентов (значимость факторов) (А)											Свободные члены		
		Плотность около-модельной зоны				Плотность верхних слоев			Распр.пл.от разьема		Средняя плотность			Матрица (В)	
Дефекты		Повышенная	Оптимальная	Пониженная	Неравномерная	Повышенная	Оптимальная	Пониженная	Повышение	Равномерно	Понижение	Повышенная	Оптимальная		Пониженная
1	Нет брака	0	3	0	0	0	3	0	0	2	3	0	3	0	14*Нетбракa (%) /100
2	Прорыв	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5*Прорыв(%) /100
3	Распор	0	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3	7*Распор(%) /100
4	Размыв	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	6*Размыв(%) /100
5	Утечка	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	5*Утечка(%) /100
6	Пригар	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4*Пригар(%) /100
7	Шероховатость	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	3	0	2	11*Шерох(%) /100
8	Ужимина	3	0	0	3	0	0	0	0	1	1	2	0	0	10*Ужимина (%) /100
9	Засор	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	6*Засор(%) /100
10	Обвал	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6*Обвал(%) /100
11	Складчатость	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0	0	6*Складчат(%) /100
12	Нарост	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	6*Нарост(%) /100
13	Горячие трещины	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	0	0	6*Горяч.Тр(%) /100
14	Газовые раковины	1	0	0	3	3	0	0	3	1	0	3	0	0	14*Газ.Рак(%) /100
15	Просечка	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	5*Просечка (%) /100

ПРО 1-ВЕРШИННУ БІМАГІЧНУ ВЕРШИННУ РОЗМІТКУ ГРАФІВ ПЕВНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Семенюта М. Ф., Шульгін В. А., Matthias Kilian
marina_semenyuta@ukr.net, vashulgin@ukr.net

*Кіровоградська льотна академія НАУ
Hof University of Applied Sciences*

Аннотація. Определены два типа графов, не допускающих 1-вершинную бимагическую вершинную разметку.

Abstract. We have defined two types of graphs that do not allow 1-vertex bimagic vertex ladtling.

Поняття магічної розмітки пов'язано з теорією чисел, а саме з магічними квадратами. В 1963 році Д. Седлячек [1] визначив її, як реберну розмітку, при якій різні ребра розмічені різними невід'ємними числами, і сума міток ребер, інцидентних певній вершині, однакова для всіх вершин. В роботах [2,3] запропонована класифікація магічних графів на різні типи: псевдо магічні, магічні, супермагічні, магічні по відношенню до простих чисел і т. п. Дослідження структурних властивостей таких розміток відбувається з декількох точок зору. Б. М. Стюарт їх розглядає для аналізу властивостей векторних просторів [2], Р. Стэнли в теорії лінійних діофантових рівнянь [4]. Схожі питання про алгебраїчні властивості розміток, підняті А. Котцигом, А. Роса [5], А. Мурти [6] і Р. Гайєм [7], сприяли вивченню властивостей самих графів та виникненню інших різновидів магічної розмітки, серед них 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка, що досліджується в даній роботі. Вона введена в 2014 році авторами роботи [8].

Нехай $G=(V, E)$ – скінченний неорієнтований граф без кратних ребер та петель. Через f позначимо вершинну розмітку графа G , а через $N(u)$ – множину суміжності вершини $u \in V(G)$. Вага $w(u)$ вершини u при розмітці f визначається як сума міток вершин суміжних з u , тобто $w(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v)$ для кожної вершини $v \in V(G)$.

Означення 1 [8]. Бієктивна розмітка $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ графа $G=(V, E)$ порядку n називається 1-вершинною бімагічною вершинною, якщо для кожної вершини $u \in V(G)$ $\sum_{v \in N(u)} f(v) = k_1$

або $\sum_{v \in N(u)} f(v) = k_2$, де k_1, k_2 – різні сталі. Граф G , що допускає таку розмітку, називають 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

В [8] визначено необхідну умову існування 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки та одержано результати відносно таких типі графів, як ланцюг P_n , цикл C_n , повний двочастковий граф $K_{m,n}$, граф $G^0(P_n)$, повний симетричний мультичастковий граф. Данна робота продовжує дослідження розпочаті в [8].

Теорема 1. Будь-який граф, який містить більше ніж дві вершини степеня один, не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Теорема 1 дає змогу виключити з дослідження багато різних типів графів. До них належать всі дерева, відмінні від ланцюгів.

Теорема 2. Нехай в графі G є вершини $u_i \in V(G)$, $i \geq 3$ для яких $\deg(u_i) = 2$. Якщо $\bigcap_{i \geq 3} N(u_i) = \{u\}$, $u_i \neq u$, то G не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Література

1. Sedlacek J. Problem 27, “Theory of graphs and its applications” //Proc. Symposium, Smolenice, 1963, Prague, P. 163-164.
2. Stewart B. M. Magic graphs // Canad. J. Math. – 1966. – Vol. 18. – P. 1031-1059.
3. Stewart B. M. Supermagic Complete Graphs. // Canad. J. Math. – 1967. – Vol. 19. – P. 427-438.
4. Stanley R. Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs. // Duke Math. J.– 1973. – Vol. 40. – P. 607-632.

5. Kotzig A., Rosa A. Magic valuations of finite graphs // Canad. Math. Bull. – 1970. – Vol. 13. – P. 451-461.
6. Murty U. S. R. How many magic configurations are there? // American Mathematical Monthly. – 1971. – Vol. 78. P. 1000-1002.
7. Guy R. Unsolved problems. // American Mathematical Monthly. – 1987. – Vol.94, No.10. – P. 961-970.
8. Babujee J. B., Babitha S. On 1-vertex bimagic vertex labeling // Tamkang journal of mathematics. – 2014. – Vol.45, No.3. – P. 259-273.

АЛГОРИТМ АНАЛИЗА DOM XSS УЯЗВИМОСТИ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РИСКАМИ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Смирнов А.А., Коваленко А.В., Коваленко А.С.
dr.SmirnovOA@gmail.com, clashav@gmail.com,
annasun911@gmail.com,

*Центральноукраинский национальный технический
университет*

Аннотация. Рассмотрен алгоритм анализа DOM XSS уязвимости в рамках метода управления рисками разработки программного обеспечения при условии ограниченности средств (финансовых, технических и др.) выделенных на устранение ошибок безопасности.

Abstract. The algorithm DOM XSS vulnerability analysis within the software development of risk management practices, provided the limited resources (financial, technical, etc.) allocated to the elimination of security errors.

Проведенные исследования, а также анализ литературы показали, что управление риском разработки программного обеспечения (ПО) состоит в заблаговременном выявлении связанных с риском финансовых, технических, психологических, и др. опасностей, и принятии мер по снижению риска путем целенаправленного изменения этих факторов с учетом эффективности принимаемых мер. Управление риском разработки ПО включает систему мероприятий, осуществляемых как до проявления негативного события, так и после его реализации. Однако, как показали

исследования, превентивный анализ и учет большинства возможных эксплуатационных ошибок позволит снизить финансовые и др. затраты в жизненном цикле разработки ПО.

Уязвимость DOM XSS представляет собой подвид XSS, в случае которой результат атаки находится не в ответе сервера и, соответственно, не в HTML коде, а в DOM структуре HTML страницы. Результаты атак посредством таких уязвимостей можно обнаружить только в процессе выполнения или анализе DOM структуры. Сам механизм атаки, а именно инъекция Javascript кода в уязвимый сегмент, остается неизменным.

Анализ:

1) Из кода анализируемой страницы извлекаются все теги `<script>` и формируется список тегов для анализа.

2) Выполняется анализ содержимого тега. При этом, если теги не содержат код, а ссылаются на удаленный файл, выполняется обращение к файлу и получение кода из него. В содержимом файла находятся потенциальные небезопасные участки кода (sink), которые используют входные данные клиента (source).

Примерами источников могут быть:

- `document.URL`
- `document.documentURI`
- `location.href`
- `location.search`
- `location.*`
- `window.name`
- `document.referrer`

Примеры sink:

- `document.write`
- `(element).innerHTML`
- `eval`
- `setTimeout / setInterval`
- `execScript`

3) Если в коде тега используется source, выполняется атака с определенным маркером, который можно отследить в DOM структуре страницы после исполнения кода (например, инъекция определенного текстового содержимого в DOM).

4) Выполняется проверка содержимого DOM. Если в результате атаки маркер находится в DOM, можно сделать вывод о наличии DOM уязвимости.

5) Шаги 2 – 4 выполняются для каждого тега script на странице.

О РОБАСТНОСТИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ ДЛЯ ПОИСКА ДЕФЕКТОВ В РЕГУЛЯРНЫХ 3D-СТРУКТУРАХ

Стецюк П.И., Савицкий В.В.

stetsyukp@gmail.com, viktor.savitsky@gmail.com,

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины

Аннотация. Рассматриваются методы для нахождения параметров регулярных 3D-структур без дефектов и с одним или несколькими дефектами. Описаны метод наименьших модулей и метод наименьших квадратов и их программные реализации на основе r-алгоритма Шора. Показано, что оба метода позволяют найти точные параметры регулярной 3D-структуры. Приведены результаты вычислительных экспериментов для оценки временных затрат этих методов при нахождении параметров регулярных 3D-структур больших размеров. Показано, что метод наименьших модулей более устойчив, чем метод наименьших квадратов, при нахождении параметров регулярных 3D-структур с одним и двумя дефектами.

Abstract. Methods for finding parameters of regular 3D structures without defects and with one or more defects are considered. The method of least modules and the method of least squares and their software implementations on the basis of Shor's r-algorithm are described. It is shown that both methods allow to find exact parameters of a regular 3D-structure. The results of computational experiments for estimating time expenditure of these methods for finding parameters of regular 3D structures of large dimensions are presented. It is shown that the method of least modules is more stable than the method of least squares for finding parameters of regular 3D structures with one and two defects.

С 3D-структурой будем отождествлять $m \times n$ -матрицу A , элементы которой будем обозначать a_{ij} , $i=1, m$, $j=1, n$. Параметрами 3D-структуры условимся считать компоненты двух векторов – вектор-строки $x \in R^n$ и вектор-столбца $y \in R^m$.

Определение 1. Регулярной 3D-структурой назовем 3D-структуру A с элементами $a_{ij} = x_j + y_i$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Задача 1. Имеется $m \times n$ -матрица A , которая задает регулярную 3D-структуру. Требуется найти параметры 3D-структуры, т.е. компоненты векторов $x \in R^n$ и $y \in R^m$.

Для решения задачи 1 можно использовать метод наименьших модулей и метод наименьших квадратов. Первому соответствует задача минимизации негладкой выпуклой функции: найти

$$f_1^* = f_1(x^*, y^*) = \min_{x \in R^n, y \in R^m} \left\{ f_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij} - x_i - y_j| \right\}, \quad (1)$$

где $|t|$ – модуль числа t . Второму соответствует задача минимизации квадратичной выпуклой функции:

$$f_2^* = f_2(x^{**}, y^{**}) = \min_{x \in R^n, y \in R^m} \left\{ f_2(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{ij} - x_i - y_j)^2 \right\}. \quad (2)$$

Теорема 1. Если 3D-структура $A = \{a_{ij}\}_{i=1, m}^{j=1, n}$ является регулярной, то ее параметры $x(A)$ и $y(A)$ равны либо оптимальному решению задачи (1): $x(A) = x^*$ и $y(A) = y^*$, либо оптимальному решению задачи (2): $x(A) = x^{**}$ и $y(A) = y^{**}$.

Задача (1) сводится к задаче минимизации линейной функции при линейных ограничениях. Для ее решения можно использовать современные программы для решения задач линейного программирования. Решение задачи (2) сводится к решению системы с $(n + m)$ линейными уравнениями. Однако, обе задачи можно решить с помощью одного и того же метода минимизации выпуклых негладких функций [1].

На основе Octave-функции `galgb5` [2, стр. 384–385], одной из современных реализаций r -алгоритма Шора, разработаны программы на языке Octave для метода наименьших модулей (МНМ), где решается задача (1), и для метода наименьших квадратов (МНК), где решается задача (2). Для регулярной 3D-

структуры, где $n = 600$ и $m = 400$, временные затраты программ для обоих методов приведены в таблице. Вычисления проводились на компьютере Pentium 3GHz в системе Windows7/32 используя GNU Octave версии 3.6.4.

Таблица.

Затраты программ для нахождения параметров регулярной 3D-структуры, где $n = 600$ и $m = 400$.

№ п/п	МНК			МНМ		
	itn	nfg	time	itn	nfg	time
1	457	700	10.58	411	502	11.76
2	494	785	11.59	413	505	11.79
3	426	647	9.77	412	503	11.77
4	453	702	10.50	412	502	11.77
5	488	764	11.34	410	499	11.69

В таблице для пяти тестовых примеров, построенных с помощью векторов $x \in R^{600}$ и $y \in R^{400}$, компоненты которых генерировались датчиком случайных чисел в диапазоне от 0 до 10, приведены: itn – количество итераций, nfg – количество вычислений функции и ее субградиента, time – время выполнения программы в секундах. Из таблицы видим, что для решения задач с помощью МНК и МНМ достаточно около 10 секунд.

Определение 2. Дефектом в регулярной 3D-структуре назовем пару индексов ij , для которых $a_{ij} \neq x_i + y_j$, $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$.

Задача 2. Имеется регулярная 3D-структура с одним или несколькими дефектами. Требуется найти такие компоненты векторов $x \in R^n$ и $y \in R^m$, чтобы полученная на их основе регулярная 3D-структура минимально (в евклидовой или манхеттенской нормах) отклонялась от $m \times n$ -матрицы A .

Для решения задачи 2 можно использовать метод наименьших модулей для манхеттенской нормы и метод наименьших квадратов для евклидовой нормы.

Теорема 2. Если 3D-структура $A = \{a_{ij}\}_{i=1,m}^{j=1,n}$ является регулярной с одним или несколькими дефектами, то ее параметры $x(A)$ и $y(A)$ более точно определяются с помощью оптимального решения задачи (1): $x(A) = x^*$ и $y(A) = y^*$, чем с помощью оптимального решения задачи (2): $x(A) = x^{**}$ и $y(A) = y^{**}$.

Утверждение теоремы 2 подтверждаются рис. 1, 2 и 3, где проиллюстрированы результаты работы МНК и МНМ для регулярной 3D-структуры с одной и двумя областями с дефектами.

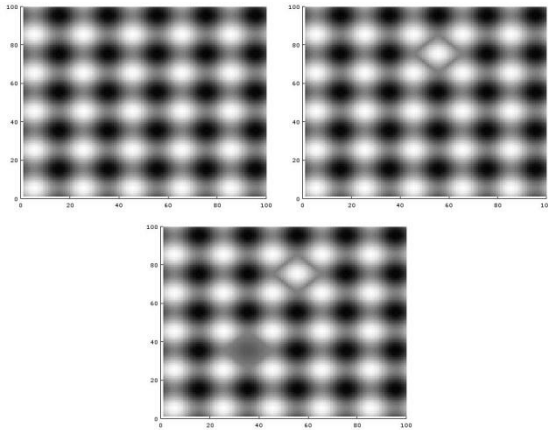


Рис.1. Регулярная 3D-структура (слева), с одним дефектом (в центре), с двумя дефектами (справа)

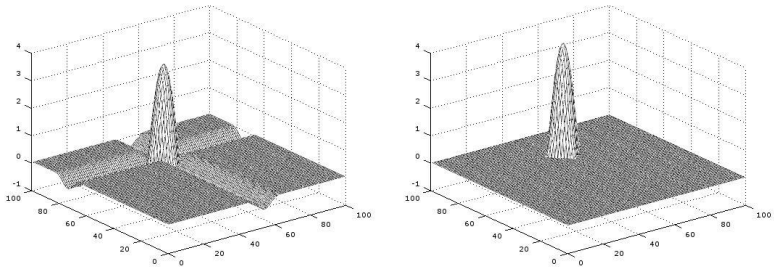


Рис.2. МК (слева) и ММ (справа) для регулярной 3D-структуры с одним дефектом

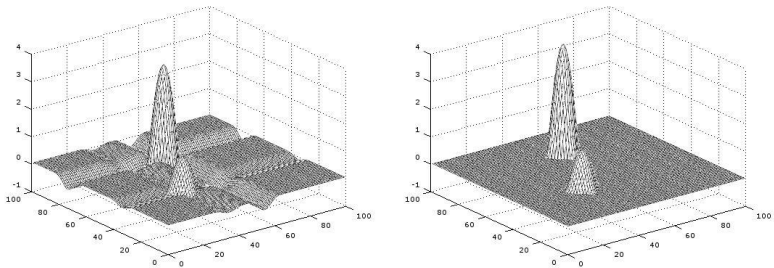


Рис.3. МК (слева) и ММ (справа) для регулярной 3D-структуры с двумя дефектами

Данные изображения (рис. 1) характерны при неразрушающем контроле качества тонкостенных многослойных композиционных материалов с помощью методов лазерной интерферометрии, таких как метод голографической интерферометрии, метод спекл-интерферометрии и метод ширографии [3].

Предлагаемый подход для поиска дефектных участков позволяет автоматизировать процесс определения местоположения дефектов в ответственных элементах конструкций и снизить влияние человеческого фактора при неразрушающем контроле качества с помощью указанных выше методов.

Литература

1. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка. – 1979. – 200 с.

2. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r -алгоритмы. – Кишинэу: Эврика. – 2014. – 488 с.

3. L.M.Lobanov, V.A.Pivtorak, I.V.Kyjanets, V.V. Savitsky, G.I.Tkachuk: Express control of quality and stressed state of welded structures using method of electron shearography and speckle-interferometry. The Paton Welding Journal, August, 2005, pp.35-40.

ВИКОРИСТАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ У ПРОМИСЛОВИХ ЗАДАЧАХ З ПОСТРОЗРАХУНКОВИМ КРИТЕРІЄМ ОЦІНКИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ІМІТАЦІЇ ВІДПАЛУ

Терешко Ярослав Вікторович, Козін Ігор Вікторович,
nsteronua@gmail.com, ainc00@gmail.com,
Запорізький Національний Університет

Анотація: В цій статті йдеться про використання еволюційних алгоритмів у промислових задачах та перевірку їх результатів з допомогою методу імітації відпау.

Аннотация: В этой статье речь идет об использовании эволюционных алгоритмов в промышленных задачах и проверку их результатов с помощью метода имитации отжига.

Annotation / Abstract: This article describes the use of evolutionary algorithms in industrial problems and checking of their results with the method of simulated annealing.

На теперішній момент існує неймовірно велика кількість практичних задач, які відносяться до класу NP-повних задач. Є багато поглядів на те яка саме методологія буде найефективнішою у ході розв'язання цих задач. На мій погляд найкращим варіантом знаходження гарних рішень для цих задач є використання метаевристичних методів. Вони не дають стовідсотково найкращих рішень, однак вони дозволяють отримати за обмежений час гарні рішення, які задовільнять критеріям пошуку.

У той самий час використання еволюційних алгоритмів у промислових задачах зустрічається доволі зрідка, точніше

практично не зустрічається. Їх можна побачити у ряді логістичних задач чи подібних до них, однак не промислових. У цього є кілька причин.

Перш за все впливає на це відмінність у апаратному забезпеченні. У промисловості використовуються програмовані логічні контролери та програмовані реле, які мають багато відмінностей від стандартної обчислювальної техніки.

Опісля цього у списку реалізації йдуть програмні відмінності. Стандартні мови програмування і середовища розробки у звичайних і промислових задачах теж відрізняються у структурі і можливостях. Ключовим у програмних відмінностях є відсутність модулів випадкових чисел та ряду інших можливостей, які є у стандартних мовах програмування.

Третім фактором є специфіка промислових задач. Здебільшого промисловість ставить перед собою задачею створення апаратного та програмного забезпечення для створення певних деталей чи виробів.

Однак, попри все вищезазначене, у промисловості є ряд задач, які можуть бути більш ефективно виконані з використання метаевристичних підходів.

На теперішній момент мною проводиться ряд експериментів програмного і апаратного характеру з підбором і використанням різного апаратного забезпечення, різних програмних комплексів і різних метаевристичних підходів.

Емпірично було доведено, що з усіх перевірених методів найкращі результати отримуються при застосування еволюційного алгоритму та перевірки його результатів методом імітації відпалу.

Еволюційний алгоритм перевершує методи пошуку бджолиного рою, мурахового алгоритму та методу глибокої долини.

У той же час для перевірки результатів на оптимальність потрібно використовувати метод, який теж буде на порядок вище за результативністю ніж його аналоги. Метод імітації відпалу продемонстрував кращі результати ніж метод локального пошуку і метод випадкового пошуку.

В основу цього методу імітації відпалу покладено математичну імітацію фізичного процесу, який використовують на металургійних комбінатах, коли метал розігрівають до певної температури, а потім поступово знижують температуру. Це дозволяє досягти стабільної кристалічної решітки, а у математичному методі це дозволяє знайти оптимальне рішення, або наближене до нього.

Спрощений вигляд кривої знайдених результатів за методом імітації відпалу продемонстрований на рисунку 1.



Рисунок 1 - Спрощений вигляд кривої знайдених результатів за методом імітації відпалу

З ідеєю більш-менш зрозуміло, а тепер до постановки задачі.

У нас є вантаж, який знаходиться в коробках. У цій статті буде наведена спрощена модель. Для цього будемо вважати, що коробки для вантажу мають один і той же габарит і відрізняються лише за вагою. Потрібно розмістити коробки з цим вантажем у певному просторі, обмеженому за розмірами. Це може бути трюм судна, залізничний вагон, відсік у літаку, кімната тимчасового зберігання на складі і так далі. Однак перед цим потрібно розділити вантаж на кілька груп.

Таким чином ми отримуємо дві задачі, або одну комплексну, яка розподілена на два етапи. Будемо розглядати другий варіант.

Перший етап задачі має на меті розподілити вантаж на кілька груп. Це потрібно для розміщення вантажу пошарово в цільовому просторі. Таким чином ми отримаємо кілька

новоутворених підгруп. Є кілька можливих критеріїв відбору, які використовуються для цієї моделі:

- 1) Поділити на приблизно рівні за масою групи.
- 2) Поділити за схемою нижча група-важча, верхня – легша.

В результаті ми отримуємо групу прямокутних об'єктів. Приклад наведено на рисунку 2.

<i>A1</i>	<i>A2</i>	<i>A3</i>
<i>A4</i>	<i>A5</i>	<i>A6</i>
<i>A7</i>	<i>A8</i>	<i>A9</i>

Рисунок 2 – приклад результат розподілу елементів до групи

Пошук оптимального складу групи відбувається з допомогою використання еволюційного алгоритму та перевірки результату з допомогою методу імітації відпалу.

Після того, як ми отримали групу елементів, необхідно розподілити їх у просторі аби досягти оптимальної остійності системи – досягти відповідності певному критерію рівноваги системи за масою.

Для цього ми повторно використовуємо еволюційний алгоритм та метод імітації відпалу. Після чого отримуємо для первинно отриманої групи нове розподілення у просторі і за масою.

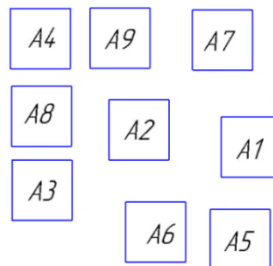


Рисунок 3 – приклад зміненої розстановки об'єктів з урахуванням критерію рівноваги

На рисунку 3 наведено приклад зміненої розстановки об'єктів з урахуванням критерію рівноваги.

З рисунка 3 постає питання «Чи не простіше було б розмістити об'єкти максимально близько один до одного?». І тут є ряд особливостей. Перш за все зверну увагу на те, що відстань на рисунках візуально збільшена і на практиці вона може різнитись у масштабі. Однак в той самий час потрібно не забувати, що розміщення залежить від найбільш оптимального розташування мас аби не внести дисбаланс, що може привести до нестабільності системи і втрати остійності. То ж це доволі індивідуальні випадки, які залежать від умов.

Висновки: Еволюційний алгоритм та метод імітації відпапу дають чудовий результат у парі. На теперішній момент продовжуються багаточисленні тестові експерименти на різних програмних та апаратних платформах аби визначити як можна було б найефективніше реалізувати роботу цих методів. Також проводиться робота з порівняння на тестових задачах з іншими методами.

Загалом зараз отримано доволі гарну конфігурацію для вирішення цілого класу задач на стандартному обладнанні і продовжується робота над впровадження підходів у промислові задачі аби отримати найбільшу віддачу у подальшому.

Список використаних джерел:

1. Козин И. В. Использование ЭВФ-алгоритмов для решения задачи прямоугольного раскроя / И. В. Козин, С. И. Полюга // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. праць; [ред. кол. О. М. Кисельова (голов. ред.) та ін.]. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту ім. Олеся Гончара, – Дніпропетровськ, 2009. – С. 199-208.

2. Козин И. В. Фрагментарные структуры и эволюционные алгоритмы / И. В. Козин // Питання прикладної математики і математичного моделювання : Зб. наук. праць / [ред. кол.: О. М. Кисельова (головний редактор) та ін.]. 2008. – С. 138-146

3. A. Moraglio, Inbreeding Properties of Geometric Crossover and Non-geometric Recombinations / A. Moraglio, R. Poli //Foundations of Genetic Algorithms, 2007, -P 1-14

4. Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, Мир, М., 1982, 416 с. Garey M. R., Johnson D. S., Computers and Intractability, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1979, 338 pp.

5. Sean Luke, 2009, Essentials of Metaheuristics, Lulu

6. B'ack T., Fogel D.B., and Michalewicz Z., eds. Handbook of Evolutionary Computation. –Oxford University Press, 1997.

7. Blum C. and Roli A. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison // ACM Computing Surveys. – 2003.

ПРО ПОДІБНІСТЬ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ РІЗНИХ КЛАСІВ

Тимофієва Н. К.

TymNad@gmail.com

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних
технологій та систем НАН та МОН України*

Аннотация. Для задач комбинаторной оптимизации разных классов приводятся общие признаки сходства, по которым устанавливается их подобие. Благодаря этому свойству они решаются одним методом или модификацией одного и того же алгоритма. Приведены примеры решения универсальными методами статических и динамических задач.

Abstract. For the problems of combinatorial optimization of different classes are given common features likeness, which set their similarity. Due to this property they decide one method or modification of the same algorithm. The examples of decision of static and dynamic problems by universal methods.

Вступ. Теорія подібності встановлює критерії подібності різноманітних фізичних явищ, що дозволяє за їх допомогою вивчати властивості самих явищ. Фізична подібність є узагальненням елементарного поняття *геометричної подібності*, при якій забезпечується пропорційність відповідних геометричних елементів фігур чи тіл. При фізичній

подібності поля відповідних параметрів двох систем подібні у просторі та часі. Наприклад, при кінематичній подібності існує подібність полів швидкостей для двох систем, що розглядаються; при динамічній подібності реалізується подібність сил або їх полів відповідної фізичної природи (сил тяжіння, сил тиску, сил в'язкості тощо).

В комбінаторній оптимізації також має місце подібність, яка пов'язана з тим, що для розв'язання задач комбінаторної оптимізації різних класів, як правило, використовують універсальні методи та алгоритми. Тобто, це говорить про те, що оговорені задачі подібні за певними ознаками. Ця властивість відрізняється від геометричної та описаної в теорії подібності. Незважаючи на величезну кількість публікацій з цієї теорії, властивість подібності в комбінаторній оптимізації достатньою мірою не висвітлена. Також не проводиться аналіз задач з метою виявлення ознак, за якими вони розв'язуються однією і тією ж обчислювальною схемою.

Нижче розглянемо деякі ознаки подібності задач комбінаторної оптимізації різних класів. Ця властивість характерна і для генерування комбінаторних конфігурацій [1].

Ознаки подібності задач комбінаторної оптимізації. При моделюванні прикладних задач в рамках теорії комбінаторної оптимізації виділимо спільні ознаки, які характерні для задач цього класу. За способом обчислення цільової функції маємо задачі, в яких для певного варіанту розв'язку її значення обчислюється одночасно. Такі задачі назвемо статичними. Задачі, в яких в процесі їхнього розв'язання генерується поточна інформація, за якою оцінюється результат, а пошук оптимального розв'язку проводиться поетапно з обчисленням часткових сум цільової функції, назвемо динамічними.

Для моделювання оговорених задач необхідно: а) за способом обчислення цільової функції визначити вид задачі (статична або динамічна); б) визначити базові множини, якими задається певна задача; в) за вхідними даними визначити її тип; г) визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію); д) змоделювати цільову функцію.

Якщо провести аналіз задач комбінаторної оптимізації на подібність, то можна побачити, що основною ознакою їхньої подібності є тип аргументу цільової функції, якими є комбінаторні конфігурації. Генерування ж комбінаторних конфігурацій різних типів також проводиться за однією і тією ж схемою або модифікацією одного і того ж алгоритму. В цьому разі подібність визначається способом їхнього утворення та впорядкування.

До загальної математичної постановки задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в якій є перестановка та які відносяться до статичних, зводяться задачі комівояжера, про призначення, розміщення одногабаритних об'єктів на поверхні та ін. Цільова функція для них моделюється однаковим виразом, за яким оцінюється результат. Завдяки цій властивості задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка та на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій (задача кластеризації), розв'язуються універсальними методами, зокрема методом структурно-алфавітного пошуку, за однією і тією ж схемою. В задачі кластеризації на деяких ізоморфних підмножинах цільова функція змінюється так, як і в задачі комівояжера.

Розглянемо динамічні задачі. Основними ознаками подібності для цих задач є зміна результату розв'язання в часі та для його поточного відліку обчислення часткової цільової функції. Для розв'язання динамічних задач дискретної математики, як правило, використовують динамічне програмування. Процес їхнього розв'язання цим методом описується орієнтованим ациклічним графом, часткові значення цільової функції змінюються в часі та обчислюються за рекурентними правилами. До того ж при оцінці результату виконується принцип Беллмана. Ці ознаки визначаються типом аргументу цільової функції.

До динамічних задач відносяться такі задачі: сегментація та розпізнавання мовленнєвих сигналів, задач Джонсона з теорії розкладів та ін. Визначимо для них аргумент цільової функції.

Найпростіша задача з теорії розкладів (задача Джонсона) формулюється так. Задано n деталей. Їхню множину позначимо $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Кожна з деталей a_j повинна пройти послідовну обробку на m машинах $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, тобто кожна деталь потребує для свого обробки одну операцію. Кожна машина також виконує одну операцію. Необхідно скласти такий розклад обробки деталей, щоб затрачений на ці операції час був би мінімальний за умови, що він не перевищує заданої величини T . Аргументом цільової функції в ній є розміщення без повторень, яке утворюється шляхом знаходження сполучення із n елементів по d , для якого генеруються $d!$ перестановок, $d \in \{1, \dots, n\}$.

Задача сегментації мовленнєвих сигналів полягає у виділенні на заданому відрізку вхідного сигналу майже періодичних та неперіодичних ділянок, а в майже періодичних визначаються довжини поточного майже періоду. Розпізнавання мови це – процес автоматичної обробки мовленнєвого сигналу з метою визначення послідовності слів, яка передається цим сигналом. Вона полягає у знаходженні для вхідного сигналу найбільш правдоподібного еталону з усіх можливих еталонних сигналів.

Процес розв'язання усіх трьох задач описується орієнтованим ациклічним графом, а часткові значення цільової функції змінюються в часі та обчислюються за рекурентними правилами. Можна довести, що при знаходженні оптимального значення часткової цільової функції виконується принцип Беллмана. Моделювання динамічних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації показує, що аргументом цільової функції в них є вибірки різних типів: сполучення без повторень, розміщення як з повтореннями так і без повторень. Оскільки ці комбінаторні конфігурації утворюються послідовним вибиранням елементів з базової множини та формують кортежі або траєкторії, то процес розв'язання цих задач змінюється в часі. Завдяки цій властивості пошук оптимального розв'язку в оговорених задачах проводиться поетапно, а сам його процес описується ациклічним

орієнтованим графом. З оговореного випливає, що вони подібні за аргументом цільової функції та розв'язуються одним і тим же методом – динамічним програмуванням.

Висновок. Отже, універсальність методів та алгоритмів визначається подібністю задач комбінаторної оптимізації. Для її встановлення при моделюванні прикладних задач необхідно виявити спільні для них ознаки. Це дозволяє розв'язувати задачі різних класів одним і тим же методом або модифікацією одного і того ж алгоритму. Так, методом структурно-алфавітного пошуку за однією і тією ж обчислювальною схемою розв'язуються задача комівояжера, задача про призначення та задача розміщення одногабаритних об'єктів. Вони подібні за аргументом цільової функції, яким є для них перестановка.

Література

1. Тимофієва Н.К. Про подібність задач комбінаторної оптимізації та універсальність алгоритмів / Н.К. Тимофієва // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 4. – С. 27–37.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАБЛИЖЕНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ

Турчина В.А., Ключник М.І.

vaturchina@mail.ru, marina.kluchnik@gmail.com

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара

Аннотація. В работе проводится сравнительный анализ приближенных алгоритмов полиномиальной сложности для решения задач параллельного упорядочения вершин произвольных ациклических графов.

Abstract. The work deals with the comparative analysis of two approximate algorithms of polynomial complexity for solving the tasks of parallel ordering of arbitrary acyclic graphs vertices.

1. Постановка задачі паралельного упорядкування

Задано граф $G = \{V, U\}$, де $V = \{1, 2, \dots, n\}$ – множина вершин, а U – множина дуг. Граф $G = \{V, U\}$ служить математичною моделлю обмежень на порядок виконання робіт, при цьому V – це множина робіт, а U – множина технологічних обмежень.

Упорядкуванням S скінченної множини V , яка складається з n елементів, називається розміщення цих елементів по n місцям, розташованим у лінію так, що кожний елемент із V розміщується лише на одному місці. [1]

Нехай $S[p]$ – множина тих елементів з V , які розміщені в S на p -му місці. Шириною $h(S)$ упорядкування S називається кількість елементів найбільшої за потужністю множини $S[p]$.

Довжиною $l(S)$ упорядкування S називаються кількість непорожніх місць упорядкування S .

Паралельне упорядкування називається оптимальним, якщо воно або при довжині, що не перевищує заданої довжини, має мінімальну ширину (задача 1), або при ширині, що не перевищує заданої ширини, має мінімальну довжину (задача 2).

Ці задачі являються NP-важкими, тому точні алгоритми їх розв'язання для довільних графів мають експоненційну складність. При розв'язанні практичних задач частіше виникає задача 2, тобто необхідно знайти таке оптимальне упорядкування $S(G, h, l)$, для якого при заданій ширині h довжина l була б мінімальною та технологічні обмеження, що задаються оргграфом G , не порушувались. Одним із підходів до розв'язання практичних задач є використання точних алгоритмів поліноміальної складності, що розроблені для спеціальних випадків задачі 2 для розв'язання задачі в загальній постановці.

В роботі розглядається два таких алгоритми: модифікація алгоритму заснованого на рівневому принципі, який є точним для дерева, та алгоритм спеціального помічення вершин (точний для графів без транзитивних дуг при $h = 2$).

2. Модифікований алгоритм заснований на рівневому принципі

При розробці методів часто використовують спеціальні упорядкування \underline{S} та \bar{S} . Ці упорядкування мають довжину l_0 і в упорядкуванні \underline{S} кожна вершина займає крайнє ліве допустиме місце, а в упорядкуванні \bar{S} – крайнє праве. Алгоритм заснований на рівневому принципі базується на використанні поміток вершин, що розставляються відповідно розміщенню вершин в упорядкуванні \bar{S} (всі вершини множини $\bar{S}[l_0]$ получують помітки 1, а множини $\bar{S}[1] - l_0$). При побудові упорядкування вершини, що мають однакові мітки, не розрізняють між собою і це призводить до того, що упорядкування може бути не оптимальним і його точність оцінюється:

$$\frac{l_A(S)}{l(S^*)} \leq \frac{2h}{h+1}, \quad (1)$$

де $l_A(S)$ – довжина упорядкування, яке отримане за допомогою точного алгоритму для дерева, $l(S^*)$ – довжина оптимального упорядкування.

Нижче приведений наближений модифікований алгоритм розв'язання задачі $S(G, h, l)$.

Маємо граф $G = \{V, U\}$. Побудуємо упорядкування $S(G, h, l)$.

1. Візьмемо $k = 1$.
2. Кожній вершині i ($1 \leq i \leq n$) призначимо 2 мітки: перша відповідає рівневому принципу, а друга – кількості дуг, що виходять з цієї вершини.
3. Будуємо спеціальне упорядкування \underline{S} .
4. Якщо $|\underline{S}[1]| < h$, записуємо усі вершини з $\underline{S}[1]$ в $S[k]$. Інакше, серед усіх вершин, які входять до $\underline{S}[1]$, оберемо h в порядку незменшення перших міток і запишемо їх в S на k -те місце. Якщо декілька вершин мають однакову першу мітку, беремо їх в порядку незростання других міток.
5. Видаляємо обрані вершини та дуги, що з них виходять, з G . Новий граф також позначаємо G .

6. Якщо $V = \emptyset$, шукане упорядкування знайдене, кінець алгоритму. Інакше, переходимо на крок 2, взявши $k = k + 1$.

Наприклад, розглянемо граф G (рис.1)

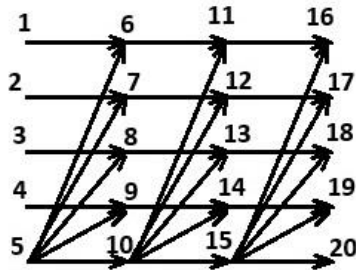


Рис.1. Приклад графа

Один із розв'язків задачі $S(G, 4, l)$, отриманий алгоритмом заснованим на рівневому принципі, має вигляд

$$S = \langle \begin{matrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 12 & 15 & 17 & 20 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \end{matrix} \rangle, \text{ тобто оцінка (1) досяжна. Розв'язок,}$$

отриманий модифікованим алгоритмом, оптимальний і має

$$\text{вигляд } S^* = \langle \begin{matrix} 1 & 4 & 8 & 12 & 17 \\ 2 & 6 & 9 & 13 & 18 \\ 3 & 7 & 11 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 16 & 20 \end{matrix} \rangle.$$

3. Алгоритм лексикографічної розстановки поміток

Побудуємо упорядкування $S(G, h, l)$.

1. Розставляємо помітки

- 1.1. Знаходимо усі вершини, що не мають вхідних дуг. У довільному порядку кожній з цих вершин присвоюємо мітку починаючи з 1.
- 1.2. Викреслюємо помічені вершини та дуги, що в них входять, та отримуємо граф G' .
- 1.3. Знаходимо усі вершини графа G' , що не мають вхідних дуг. Для кожної з цих вершин випишуємо помітки суміжних з нею вершин з початкового графа G . Потім, в

порядку лексикографічного зростання вписаних поміток, помічаємо знайдені вершини.

- 1.4. Якщо ще помічені не усі вершини, переходимо на крок 1.2. Інакше, переходимо на крок 2.
2. Будуємо упорядкування
 - 2.1. Візьмемо $k = 1$.
 - 2.2. Випишуємо у порядку зменшення поміток список вершин графа G , що не мають вхідних дуг.
 - 2.3. На k -те місце упорядкування ставимо перші h вершини зі списку та викреслюємо ці вершини та суміжні дуги з графа. Новий граф також позначаємо G .
 - 2.4. Якщо $V = \emptyset$, шукане упорядкування знайдене, кінець алгоритму. Інакше, переходимо на крок 2.2, взявши $k = k + 1$.

Оцінка якості алгоритму для довільного графа має вигляд

$$\frac{l_A(S)}{l(S^*)} \leq 2 - \frac{1}{h}, \quad (2)$$

де $l_A(S)$ – довжина упорядкування, яке отримане за допомогою точного алгоритму для графів без транзитивних дуг при $h = 2$, $l(S^*)$ – довжина оптимального упорядкування.

4. Висновки

Проведений аналіз наближених алгоритмів дозволяє виділити підкласи графів, для яких алгоритми, що розглядаються, дозволяють зменшити похибки, а в деяких випадках навіть отримати оптимальні розв'язки. Зокрема, модифікований алгоритм, в випадку, коли всі вершини графа лежать на критичних шляхах, може давати оптимальний розв'язок.

Література

1. **Бурдюк В. Я.** Алгоритмы параллельного упорядочения / В. Я. Бурдюк, В. А. Турчина. – Д.: ДГУ, 1985. – 84с.

К ПРОБЛЕМЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ В АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СЕТЕЙ

Удовиченко А.С.

a_udovichenko@list.ru

*Балтийский Государственный Технический Университет
“Военмех” имени Д.Ф.Устинова, Санкт-Петербург*

Целью настоящей работы является попытка объединения процесса разработки и эксплуатации сетей и систем управления с использованием графов.

Методической основой исследования и создания математических моделей сетей, разработка на их основе программных средств построения, анализа и синтеза сетей являются: теория сетей, теория графов, теория игр, исследование операций, теория расписаний, автоматизация проектирования, методы компьютерного моделирования и т.д. Для решения указанных задач осуществляется:

1. Обзор методов и средств автоматизированного проектирования сетей.
2. Разработка способов представления математических моделей сетей и технологических алгоритмов их исследования в диалоговой системе моделирования.
3. Разработка методов ведения и организации диалога при проектировании и исследовании сетевых моделей.
4. Разработка методов и алгоритмов реализации управления информационной базой сетевых моделей.
5. Создание инструментальных средств разработки программных модулей для исследования сетей различного назначения.

В процессе разработки способов представления математических моделей сетей используется графовое и гиперграфовое представление, т.к. они являются наиболее подходящими моделями структуры сети.

Анализ теоретико-графового подхода исследования структурной надежности сетей связи показывает, что возникает необходимость в создании методов ведения диалога,

позволяющих исследователю использовать программные средства для реализации его опыта и интуиции при построении и анализе сетевой модели. Решение задач, связанных с анализом, синтезом и управлением сети, требует постоянной работы с иллюстративным материалом сетевой модели.

Нами предпринята попытка объединить процесс разработки и эксплуатации сетей и систем их управления.

Литература

1. Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 1104 с.

2. Ярушкина Н.Г, Макеев А.С., Стецко А.А. Автоматизированное проектирование корпоративных сетей на основе нечетких гиперграфов // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. Сборник трудов IV-й Международной научно-практической конференции (Коломна, 28- 30 мая 2007 г.). В 2-х томах. Т.1.- М.:Физматлит, 2007.- С. 243-250.

РОЗРОБКА ТИПІВ ДАНИХ ДЛЯ ЕКСПЕРТНОЇ СИСТЕМИ «VINE» ДЛЯ АУДИТУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

Хох В.Д., аспірант, vd.khokh@gmail.com,

Мелешко Є.В., к.т.н., доцент, elismelshko@gmail.com,

Центральноукраїнський національний технічний університет

Аннотація. Рассмотрены и описаны типы данных, которые используются для записи правил продукции в экспертной системе “Vine”.

Abstract. Considered and described data types that are used for writing rules for expert system “Vine”.

В сучасному динамічному світі інформаційних технологій все частіше гостро постає питання про забезпечення достатньої захищеності комп'ютерних систем. Для оцінки рівня захищеності комп'ютерних систем необхідно регулярно або за

певних подій (напр., інциденту) проводити аудит інформаційної безпеки. Процес проведення аудиту інформаційної безпеки досить витратний, оскільки передбачає покриття тестами та експертизами великої кількості вузлів інфраструктури організації. Тим не менш, деякі з видів тестів, передбачених аудитом, можливо автоматизувати, саме з цією метою розробляється система «Vine», в центрі якої стоїть експертна система на основі продукційного представлення знань.

Структурі продукції розроблюваної системи відповідає рядок у базі знань. Структурою передбачені два поля з правилом використання продукції та, безпосередньо, ядром продукції. Дані у цих двох блоках представляються у вигляді змінних. В рамках системи визначено три типи даних: діапазон цілих чисел, діапазон з плаваючою точкою та строкові множини. Варто зауважити, що, хоча у системі типи даних визначено по-різному для фактологічної бази та для тіла продукції, але, за великим рахунком, це необхідно для внутрішніх потреб системи, в подальшому від цього необхідно позбутися. Розглянемо спільні для типів даних, у фактологічній базі та типів у тілі продукції, параметри:

- NameSpace – параметр вказує на простір імен, якому належить факт.

- Name – ім'я факту у фактологічній базі.

- CurrentValue – поточне значення факту у фактологічній базі.

- Weight – визначає поточну «вагу» змінної. Використовується для зберігання ваги у фактологічній базі, а у тілі продукції використовується для тимчасового зберігання ваги під час обробки даних. Згодом цей параметр буде використано для процесів фазифікації та дефазифікації даних.

Для типів даних, які зберігаються у фактологічній базі характерними є параметри:

- CurrentValue – зберігає поточне значення змінної у фактологічній базі, в процесі роботи з системою може бути змінено як системою так і користувачем-аудитором.

- UseAsTrigger – параметр приймає значення true або false.

Приймає значення істини тоді, коли значення змінної визначає ім'я простору імен, яке треба додати до фактологічної бази.

– `IsInLim` – параметр приймає значення `true` або `false`.
Приймає значення істини. Якщо значення факту знаходиться в діапазоні змінної, що визначена серед продукцій, які відібрано для можливого застосування.

Характерними параметрами для типів даних, що визначаються у тілі продукції є:

Для чисел цілих та з плаваючою точкою:

– `Min` – визначає мінімальне значення діапазону.

– `Max` – визначає максимальне значення діапазону.

Для рядкових даних – рядкових множин:

– `StringSet` – масив рядків, що вказують на певне значення факту.

– `UseSepWeight` – параметр приймає значення `true` або `false`. Приймає значення `true` у разі, якщо користувач-експерт хоче самостійно визначити вагу кожного рядка у множині рядків і відповідно – вказати символ, яким буде розділяти значення ваги та рядок, який вказує на значення факту.

– `SepWeightChar` – символ, що буде використано для розділення значення ваги та рядка, який вказує на значення факту.

Використання таких типів даних дає змогу зробити якомога більш точний опис предметної області, в рамках якої може функціонувати експертна система.

НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Черноусова Ж. Т.
chernjant@ukr.net

*Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт
имени Игоря Сикорского»*

Аннотация. Устанавливается соответствие между байесовской системой управления и её функцией неопределённости, сначала задавая способ измерения неопределённости.

Abstract. We study the correspondence between the Bayesian control system and its uncertainty function, first setting the measurement method uncertainty.

Поскольку полное знание возможно лишь в идеале, потому в частной и общественной жизни люди вынуждены принимать те или иные решения в условиях «неопределённости».

Точные ответы на вопрос о том, что такое «неопределёность», и как в этих условиях принимать решения могут давать различные математические формализации задачи, описывающие частные ситуации. Наиболее полно разработано понятие неопределённости, использующее вероятностную случайность.

Проблема заключается в том, как без необоснованного предположения о наличии вероятностной случайности и, не впадая в излишнюю перестраховку, разумно действовать в условиях неопределённости.

Рассмотрим ситуацию, когда неопределёность заключается в том, что нам неизвестно значение некоторого параметра θ , принимающего значение из множества Θ , которое полностью известно. Известно также множество возможных решений D и функция $L(\theta, d)$, определяющая потери при выборе решения d из D , если истинное значение параметра есть θ .

Формулируется следующая задача: заданы Θ , D , L и какие-то свойства последовательности $\{\theta_n\}$ из Θ . Нужно выбрать последовательность решений $\{d_n\}$ из D .

Утверждение 1. [2]. Какова бы ни была система управления S , для того чтобы функция $v(S, \cdot)$ обладала на множестве распределений параметра θ двумя свойствами – равна нулю, когда распределение сосредоточено в одной точке; и лучшим из любой пары экспериментов окажется всегда тот, который в среднем сильнее уменьшает неопределённость, – необходимо и достаточно, чтобы она была представима с точностью до константы в виде разности двух слагаемых. Первое слагаемое – это средние потери, которые мы несем из-за стохастической неопределённости в выборе θ из Θ . Второе слагаемое – это наименьшие средние потери, которые возникали бы, если бы перед выбором управления сообщался выбор θ .

Определение. [2]. Всякую функцию, удовлетворяющую условию этого утверждения, будем называть функцией неопределённости, порождённой системой управления.

Следовательно, всякой системе управления соответствует способ измерения стохастической неопределённости.

Утверждение 2. [2]. Всякая функция, равная нулю, если распределение сосредоточено в одной точке; непрерывная (или неотрицательная) и вогнутая на множестве распределений параметра θ , порождается некоторой системой $S(\Theta, D, L)$ как её функция неопределённости.

Будем устанавливать соответствие между байесовской системой управления и её функцией неопределённости в обратном порядке, сначала задавая способ измерения неопределённости.

Например, пусть байесовская система управления – это система, в которой производится управление кодированием. Тогда Θ – это некоторый алфавит, D – множество всех однозначно декодируемых кодов, $L(\theta, d)$ – длина кодового обозначения $d(\theta)$.

Литература

1. Иваненко В. И. Проблема неопределённости в задачах принятия решений: Монография/ В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. – К.: Наук. думка, 1990. – 136 с.

2. Иваненко В. И. Неопределённость в стохастических системах управления / В. И. Иваненко // Автомат. и телемех. – 1983. – выпуск 4. – С. 50-57.

3. Kyle Jurado, Sydney C.Ludvigson, Serena Ng. Measuring Uncertainty // American Economic Review. – 2015. – 105(3). – P.1177-1216.

4. В. Ebanks, Characterizations of information measures / В. Ebanks, P. Sahoo, W. Sander. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998. – 281 p.

ЩЕ ДЕЩО ПРО $\theta(H, F)$

К. М. Шевченко

*Кіровоградський державний педагогічний університет
ім. В. Винниченка*

Аннотация. Построение множеств $R_{4,\theta}$, состоящих из гамильтоново разложимых графов, где $H_{t+1} = \theta(H_t, F_t)$, позволяет применить математическую индукцию для доказательства некоторых свойств 4-регулярных гамильтоново разложимых графов. Приведён пример.

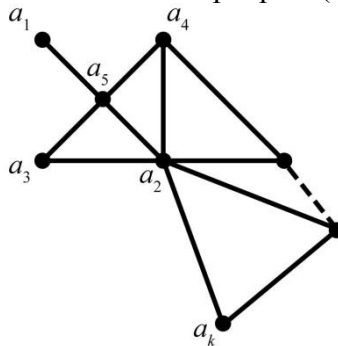
Abstract. Construction of sets $R_{4,\theta}$ consisting of Hamiltonian decomposable graphs where $H_{t+1} = \theta(H_t, F_t)$ allows to apply mathematical induction to corroborate certain properties of 4-regular Hamiltonian decomposable graphs. An example is provided.

Доведено [1], що кожен 4-регулярний гамільтоново розкладний граф належить до деякої множини $R_{4,\theta}$, в якій графом найменшого порядку є деякий основний [2] гамільтоново розкладний граф.

У множині $R_{4,\theta}$ кожен граф H' порядку $t+1$ отримується з графа H порядку t : $H' = \theta(H, F)$, де F – така паросполука розміру 2 графа H , в якій ребра належать до різних компонент деякого гамільтонового розкладу графа H . Таке утворення графа H' порядку $t+1$ з графа H порядку t дозволяє

доводити методом математичної індукції й інші властивості гамільтоново розкладних графів.

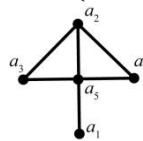
Приклад. Існує нескінченна послідовність гамільтоново розкладних графів H_i , в якій кожен граф H_{t+1} , $t \geq 1$, є графом $H_{t+1} = \theta(H_t, F_t)$, і в кожному графі H_t цієї послідовності є підграф порядку $t+3$, який являє собою півколесо порядку $t+2$ з приклеєним до нього висячим ребром (мал. 1).

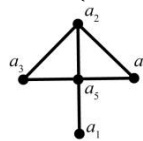


Мал. 1

Доведення. В графі H_1 повинен існувати підграф G_1 : 

В ньому вибираємо паросполуку $F_1 = \{(a_1, a_2), (a_3, a_4)\}$. В графі



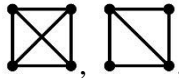




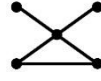
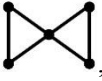
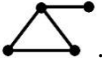
$H_2 = \theta(H_1, F_1)$ є підграф G_2 : . В G_2 є підграф, ізоморфний графу G_1 .

Якщо ребра (a_1, a_2) і (a_3, a_4) належать до різних компонент гамільтоново розкладу графа H_1 , то, оскільки ребро (a_1, a_5) в G_2 належить до тієї ж компоненти (наприклад, 1) графа H_2 , що і (a_1, a_2) в H_1 (номер компоненти не має значення), то ребра (a_2, a_3) , (a_2, a_4) належать до різних компонент гамільтоново розкладу

графа H_2 , інакше або вершині a_2 графа G_2 були б інцидентні три ребра з компоненти 1, що неможливо, або в H_2 чотирикутник $C_4 = (a_2, a_3, a_3, a_4)$ належав би до компоненти 2, що також неможливо, бо порядок графа H_2 більший за 4. Виберемо те з ребер (a_2, a_3) , (a_2, a_4) , яке належить до компоненти 2, і, разом з ребром (a_1, a_5) , включимо його до паросполуки F_2 . Існує граф $H_3 = \theta(H_2, F_2)$ і його гамільтонів розклад.

Припустимо, що таким чином побудовано граф H_k . Міркуючи аналогічно, лише, можливо, змінивши номери деяких вершин, доведемо існування графів $H_{k+1} = \theta(H_k, F_k)$ і $H_{k+2} = \theta(H_{k+1}, F_{k+1})$. Доведення закінчене.

Послідовностей, описаних в прикладі, досить багато. Кожна паросполука F_i є 1-фактором деякого підграфа порядку 4. З 11

графів порядку 4 п'ять взагалі не мають 1-факторів, ,  мають підграфи . G_i : , G_j :  не мають таких підграфів, але, вважаючи їх підграфами графів H_i , H_j і вибравши в G_i , G_j паросполуки F_i , F_j , знайдемо в графах $H_{i+1} = \theta(H_i, F_i)$ та $H_{j+1} = \theta(H_j, F_j)$ підграфи  та , відповідно, а в цих підграфах є .

Література

1. Шевченко К. М. Множини $R_{4,\theta}$ гамільтоново розкладних графів, Наукові записки КДПУ. Математичні науки. 74, 80-87.
2. Шевченко К. М. Будова основних 4-регулярних гамільтоново розкладних графів, Матеріали 18-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 15–16 квітня 2016 р., м. Кіровоград.

**УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК
ЄВГЕН ВІКТОРОВСЬКИЙ –
ЗАСНОВНИК ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ**

Шендеровский В.А., Лісковець С.М.

schender@iop.kiev.ua, lissds09@ukr.net

Інститут фізики Національної академії наук України

Луцький національний технічний університет

***Аннотація.** В тезах дана краткая характеристика основных направлений научной деятельности украинского математика Е.Е. Викторовского (1926–1956). Работы ученого определяют основу современной теории оптимального управления. Викторовский обосновал новый метод построения экстремальных решений, получил весомые результаты, которые относятся к теоретико-множественному направлению дифференциальных и интегральных уравнений.*

***Abstract.** This conference abstract briefly characterizes the research activity of the Ukrainian mathematician Y.Y. Victorovskyi (1926–1956). The works of the scientist form a base for the modern theory of optimum control, in particular, developing the effective constructive method of creation of extreme solutions, and obtaining significant results, related to the theoretic-multivariable area of differential and integral equations.*

Постать талановитого українського математика Євгена Євгеновича Вікторовського (1926–1956) та його вагомий науковий доробок на сьогоднішній день залишаються недостатньо вивчені та проаналізовані. Вітчизняні науковці пророкували молодому вченому Євгену Вікторовському почесне місце серед найвідоміших математиків світу. Склалося так, що важка хвороба (саркома) рано обірвала життя талановитого вченого, але, не дивлячись на короткий життєвий шлях, Вікторовський залишив цікаву наукову спадщину, багату на новітні ідеї та неординарні шляхи вирішення наукових проблем.

У своїх спогадах професор Л. Дундученко писав: «Його ім'я, як і життя, промайнуло яскравим метеоритом-болідом, цей самородок – син Землі Української, пішов у космічну нескінченність, залишивши свої математичні відкриття, математичні здобутки – як безцінний дарунок наступним поколінням» («Урядовий кур'єр» за 27.03.2008 р.).

Математики, сучасники Вікторовського, як і малочисельні дослідники його наукової діяльності називали вченого «українським Галуа». Еварист Галуа (1811-1832) – відомий французький математик, який прожив 20 років, з них лише 5 років займався математикою. Математичні роботи Галуа, що займають трохи більше 60 сторінок зробили його ім'я безсмертним, адже він є засновником сучасної алгебри, автором відомих праць, присвячених теорії чисел, його роботи про можливість розв'язання алгебраїчних рівнянь в радикалах є основою найбільш вагомих розділів алгебри, що дістали назву теорії Галуа. Фактом є те, що праці Галуа були опубліковані після смерті автора (через 14 років), а світове визнання прийшло ще пізніше – в 1870 роках, коли серед основних математичних понять з'явилося поняття групи (а ще пізніше поняття: група Галуа, поле Галуа, теорія кілець Галуа, тощо).

Порівняння Євгена Вікторовського з геніальним французьким математиком Галуа носить глибинне наповнення з різних сторін: український математик також прожив коротке життя, проте лише за три роки роботи в Київському політехнічному інституті (фізико-математичний факультет Київського університету закінчив екстерном у 1952 році) він написав та блискуче захистив кандидатську дисертацію, за що Вчена рада одностайно вирішила присудити йому відразу ступінь доктора наук. Є. Вікторовський встиг опублікувати лише шість праць в найавторитетніших наукових журналах того часу: «Доклады АН СССР», «Математический сборник», «Известия вузов. Математика», «Известия КПИ». Особливістю праць вченого є лаконічність та глибинний зміст, в яких представлені кінцеві результати без детального проміжного обґрунтування та аналізу. Саме такий стиль притаманний роботам великого Галуа, які були розшифровані французьким математиком Ліувіллем, після чого зайняли почесне місце в світовій математиці. Історія ніби робить підказку про необхідність детального дослідження праць талановитого математика.

Вміння стисло мислити та ґрунтовне знання наукових праць найвідоміших математиків дозволили Євгену

Вікторовському зробити вагомий внесок в розвиток математичних дисциплін, зокрема в теорію оптимального керування, що вирішує завдання проектування системи, яка для певного об'єкта або процесу управління забезпечує закон керування чи скеровану послідовність дій, які відповідають мінімуму або максимуму заданої сукупності критеріїв якості. Для того щоб виконати завдання оптимального управління, будується відповідна математична модель керованого об'єкта або процесу, яка описує його поведінку в залежності від часу, враховуючи вплив керуючих чинників і власного поточного стану. На шляху створення теорії оптимального керування Вікторовський створив загальну теорію розривних систем. Даній теорії була присвячена дисертація «Интегральные кривые разрывного поля направлений» (опоненти – професори О.С. Смогоржевський, Ю.М. Березанський). Молодий вчений в дисертаційній роботі описав і провів дослідження плоского поля напрямків, яке задавалося рівнянням з розривною правою частиною.

Одним із основних досягнень дисертації є доведення теореми про існування узагальнених розв'язків відповідних диференціальних рівнянь. Теорема стала фундаментом конструктивної побудови екстремальних рішень. Вікторовський продемонстрував відповіді на питання, над якими працювали математики минулого. Дослідження дисертанта науковий керівник, член – кореспондент АН УРСР Є.Я. Ремез високо оцінював, відносячи їх до теоретико-множинного напрямку в теорії диференціальних рівнянь, при цьому наголошував: «Кожна із восьми глав дисертації Є.Є. Вікторовського, взята окремо, може бути визнана більш ніж достатньою для повноцінної дисертації на вчений ступінь кандидата наук. У цілому вона перевищує рівень навіть докторської». Дослідження систем диференціальних рівнянь з розривними та з необмеженими нелінійностями, аналіз метричних та топологічних властивостей множин узагальнених кривих дали можливість вченому створити зовсім новий ефективний метод побудови екстремальних розв'язків, що лягли в основу теорії оптимального керування, якої в той час

ще не існувало. Окремі результати, отримані в працях вченого, мають відношення до нелінійних інтегральних та диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У 60-80 роках минулого століття математичні роботи Є. Вікторовського частково досліджувалися академіком М.В. Азбелявим та його учнями, були запропоновані нові підходи до розв'язку релейних диференціальних та інтегральних рівнянь, в основу яких лягла робота «Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений» (1954). Результати досліджень Вікторовського зберігають актуальність до теперішнього часу. Так, запроваджені вченим, поля конусів напрямків дали можливість досліджувати складні процеси в термодинаміці, механіці, електротехніці та хімії. Математики сьогодення запровадили нові математичні терміни: «розв'язок в сенсі Вікторовського», «воронки Вікторовського», що є переконливим свідченням значимості наукового доробку талановитого українського математика.

Література

1. Вірченко Н. «Український Галуа» Євген Вікторовський // Країна знань-2010. – №6(73). – С.11-12.
2. Шендеровський В. Нехай не гасне світ науки. Книга третя. – Київ. Видавничий дім «Простір». – 2011. – С.42-47.

КВАДРАТНАЯ РАЗНОСТНАЯ РАЗМЕТКА ГРАФА ПОДРАЗБИЕНИИ

Шерман З. А.

sherman.zoya@gmail.com,

Донецкий национальный медицинский университет

Аннотация. В данной работе рассмотрен конструктивный метод построения квадратных разностных деревьев, основанный на методе Δ -построения грациозных деревьев.

Abstract. In this paper a constructive method of constructing the square differential of the trees based on the method of Δ -constructing graceful trees.

Математическими моделями многих задач выступают графы. В основе методов решения некоторых из них в таких областях, как рентгеновская кристаллография, теория кодирования, радиолокация, астрономия, проектирование схем и сетей, управление базами данных, лежит теория разметок графов.

Актуальность проблемы грациозной разметки графов, а именно, проблема Котцига-Рингеля-Роса принесла волну различных методов разметок графов. В частности, один из конструктивных подходов, нахождения грациозных деревьев больших размеров из известных грациозных деревьев был предложен Р.Стентон, С.Занке [1], К.Кох, Д.Роджерс и Т.Тан [2], [3], [4]. К.Кох, Д.Роджерс и Т.Тан выполнили построение нового графа, добавив к дизъюнктивному объединению изоморфных копий данного грациозного графа T , дополнительную вершину, соединенную ребрами с изоморфными образами некоторой фиксированной вершины T . Данный метод использован при исследовании на грациозность симметричных деревьев. Эти же авторы обобщили указанный метод, отождествив изоморфные образы фиксированной вершины графа T , с дополнительной вершиной. В работе [3] построение грациозного дерева реализовано по заданной паре грациозных деревьев и названо Δ -построением. Используя его, К.Кох и др. доказали грациозность полного m -арного дерева. В данной работе применен метод Δ -построения к квадратному разностному дереву.

Под графом понимаем конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Пусть $G=(V, E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Будем считать, что $|V(G)|=p$, $|E(G)|=q$.

Определение 1. [5]. Функцию f называют квадратной разностной разметкой графа G с p вершинами, если f – биекция из $V(G)$ на множество $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ и индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u,v)=|[f(u)]^2-[f(v)]^2|$ является инъекцией из $E(G)$ в множество натуральных чисел.

Граф, допускающий квадратную разностную разметку, называется квадратным разностным графом или SD графом.

Теорема 1. Если дерево S порядка m имеет квадратную разностную разметку f_m , а дерево T порядка n имеет квадратную разностную разметку f_n с наибольшей меткой n в вершине v_1 , т.е. $f(v_1)=n$ и T_1, T_2, \dots, T_m – изоморфные копии дерева T , тогда дерево $S\Delta T$, полученное с помощью отождествления каждой вершины w_i графа S с образом вершины v_1 дерева T в каждой изоморфной копии T_i , где $i=1, 2, \dots, m$, является SD -графом.

Для иллюстрации теоремы 1, рассмотрим дерево S порядка 5 и дерево T порядка 4 (рис. 1, 2).

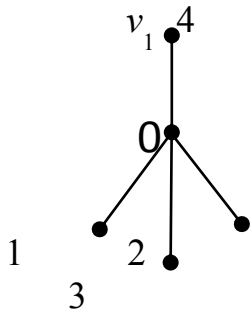


Рис. 1. Квадратная разностная разметка дерева T

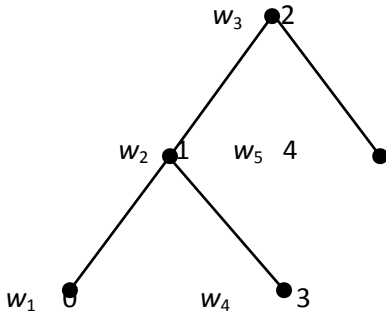


Рис. 2. Квадратная разностная разметка дерева S

Выполним Δ -построение графа $S\Delta T$, как указано в доказательстве теоремы 1 (рис.3). За основу возьмем дерево S , тогда множество меток его вершин образует

множество последовательных натуральных чисел, а множество меток ребер – множество различных натуральных чисел. Значит $S\Delta T$ – квадратный разностный граф.

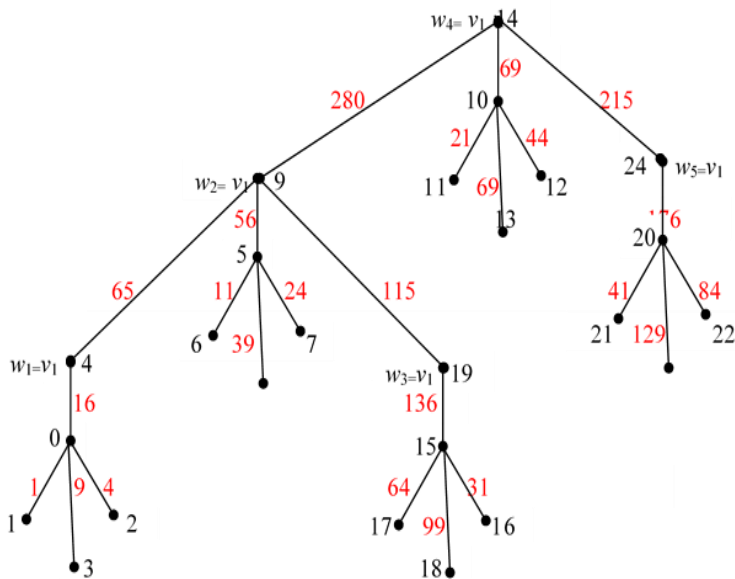


Рис. 3. Квадратная разностная разметка дерева $S\Delta T$

Литература

1. Stanton R., Zarnke C. Labeling of balanced trees. // Proc. 4th Southeast Conf. Combin., Graph Theory, Comput. – 1973. – P. 479-495.
2. Koh, K. M., Rogers, D. G. and Tan, T. On graceful trees. // Nanta Mathematics. – 1977. – Vol. 10, № 2. – P. 207-211.
3. Koh, K. M., Rogers, D. G. and Tan, T. Two theorems on graceful trees. // Discrete Mathematics. – 1979. – Vol. 25. – P. 41-148.
4. Koh, K. M., Rogers, D. G. and Tan, T. Products of graceful trees. // Discrete Mathematic. – 1980. – Vol. 31. – P. 279-292.
5. Ajitha V., Princy K. L., Lokesha V., Ranjini P. S. On square difference Graphs // International Journal of Mathematical Combinatorics. — 2012. — Vol.1, №1. — P. 31–40.

МЕТОДИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ПОБУДОВИ ГРАФОВИХ СТРУКТУР СПІЛЬНОТ У СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ

Шингалов Д.В., аспірант, dima.neyman@mail.ru,

Мелешко Є.В., канд. техн. наук, доцент,
elismeleshko@gmail.com,

Минайленко Р.М., канд. техн. наук, доцент, aron70@ukr.net

Центральноукраїнський національний технічний університет

Аннотація. Рассматривается применение методов автоматизации построения графовых структур с целью выделения непересекающихся социальных сообществ в виртуальных социальных сетях.

Abstract. The application of automation techniques for constructing graph structures is considered in order to highlight social communities that do not overlap in virtual social networks.

Графи відіграють важливу роль в моделюванні складних структур, таких як схеми, зображення, хімічні сполуки, білкові структури, біологічні системи, соціальні мережі. Із зростанням попиту на аналіз великих обсягів структурованих даних, побудова графів стала важливою темою в рамках інтелектуального аналізу даних.

Багато соціальних мереж демонструють виокремлення спільнот у своїй структурі. Спільноти є групами вузлів, які мають високу зв'язність в групі і низьку зв'язність між групами. Спільноти приблизно відповідають організаціям і групам окремих реальних осіб.

Серед безлічі методів аналізу соціальних графових структур, частіше за все, на практиці застосовують три оптимальних методи для віділення неперетинаючихся спільнот – це метод оптимізації модульності, спектральна кластеризація та метод Infomap.

Модульність є методом виявлення спільноти [1], а також оцінкою ступеню відокремленості підграфа на основі порівняння між даними реального графа і моделі графа, побудованого випадковим чином, з тим же самим очікуваним ступенем розподілу, що і в оригінальному графі. Це найпопулярніший якісний показник при виявленні спільнот в соціальних мережах. Проте модульність має свої недоліки і

стає ненадійною, коли мережа занадто розріджена. Метод, запропонований Ньюменом і Муром на основі класичного алгоритму модульності, вирішує цю проблему. Модульність обчислюється наступним чином:

$$Q = \frac{1}{m} \sum_{ij} \left[A_{ij} - \frac{d_i^{in} d_j^{out}}{m} \right] \delta_{c_i, c_j},$$

де δ - це функція, що дорівнює одиниці, якщо номер спільноти (групи, кластера) $c_i = c_j$, інакше дорівнює нулю, m - кількість ребер, A_{ij} є індикатором наявності з'єднання між вершинами i та j у матриці суміжності A , а d_i^{in}, d_j^{out} - кількість ребер, що з'єднують будь-які вершини c , у вхідному та у вихідному графах відповідно.

Спектральні методи виявлення спільнот [2] базуються на нормованих скороченнях для кластеризації. Розріз розбиває граф на окремі частини шляхом видалення ребер. Спектральна кластеризація розбиває граф на два підграфа, використовуючи найкращий зріз, в якому внутрішні спільноти мають сильний зв'язок, а віддалені - низький. Завдання кластеризації, у цьому випадку, еквівалентне розгляду власних векторів лапласіану графу, що визначається як:

$$L = D - A,$$

де D - матриця, на головній діагоналі якої знаходиться ступінь вершин графу, а інші елементи- нулі, а A – матриця суміжності графа.

Лапласіан графу дає симетричну позитивно-напіввизначену матрицю, що має властивість діагонального домінування.

При застосуванні **методу Infomap**, що базується на використанні алгоритму випадкових блукань та коду Хаффмана, граф може бути перетворений по марковській моделі, в якій випадкові блукання на вузлах мають високу ймовірність переходу до внутрішньої спільноти вузлів і низьку ймовірність переходу поза спільнотою. Завдання знаходження оптимальної структури кластеру графа, можна розглядати як

проблему оптимального (без втрат) стискання послідовності вузлів від випадкового блукання [3]. Більш конкретно, пошук для розбиття модуля M (тобто, набір кластерних завдань) з N вузлів в кластерах m , що мінімізує таку очікувану довжину опису одного кроку випадкового блукання на графі, описується:

$$L(M) = q H(Q) + \sum_{i=1}^m p^i H(P^i).$$

Це рівняння містить два доданки: перше це ентропія руху між кластерами, а другий – це ентропія руху всередині кластерів, кожен з яких визначається відповідно частоті, з якою він видобувається при конкретному секціонуванні. Тут Q – це ймовірність того, що випадкове блукання перемикається на кластери у будь-який даний крок, і $H(Q)$ – це ентропія верхнього рівня кластеру. Аналогічним чином, $H(P^i)$ – це ентропія рухів в кластері, а p^i – це частка рухів в кластері i .

Кожен з розглянутих методів, має широке практичне застосування при аналізі та візуалізації структури соціальних мереж. Окрім цих алгоритмів у класичному вигляді, часто застосовуються їх численні модифікації.

Література

1. E.A. Leicht and M.E.J. Newman, Community structure in directed networks, *Physical Review Letters*, 2008. - 100: 118703.
2. J. Shi and J. Malik, “Normalized Cuts and Image Segmentation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 22, no. 8, 2000, pp. 888–905.
3. M. Rosvall and C.T. Bergstrom, “Maps of Random Walks on Complex Networks Reveal Community Structure,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, no. 4, 2008, pp. 1118–1123.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ КОМБІНАТОРИКИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО СКЛАДУ ПОВІТРЯНОГО ПАРКУ АВІАКОМПАНІЇ

Шмельова Т.Ф.

Shmelova@ukr.net

Національний авіаційний університет

Сікірда Ю.В.

SikirdaYuliya@yandex.ua

Кіровоградська льотна академія

Національного авіаційного університету

Аннотация. Представлен подход к прогнозированию эффективности операционной деятельности авиакомпании с использованием методов комбинаторики и регрессионного анализа. Разработанная регрессионная модель позволяет находить оптимальный состав воздушного парка для обеспечения минимальной стоимости авиаперевозок при условии максимального удовлетворения спроса на транспортировку.

Abstract. An approach to forecasting the efficiency of the airline's operating activity is presented using combinatorial and regression analysis' methods. The developed regression model allows finding the optimal aircrafts' composition to guarantee the minimum cost of air transportations provided that the demand for transportation is ensured maximally.

Актуальність теми. У сучасних умовах авіакомпанії при відкритті нової повітряної лінії або при зміні попиту за маршрутами авіаперевезень зіштовхуються з проблемами визначення оптимального складу повітряного парку та розподілу наявних повітряних суден (ПС) за визначеними рейсами для максимального задоволення існуючого попиту на авіаперевезення за умови мінімізації витрат авіатранспортного підприємства. Математичним апаратом, який доцільно використовувати для розрахунку оптимального складу повітряного парку авіакомпанії, є комбінаторика [1-2] та регресійний аналіз [3-4], для розподілу ПС за встановленими напрямками авіаперевезень – транспортна модель [3-4].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. При проведенні досліджень науковці акцентують увагу на необхідності організації пасажиропотоків для максимального задоволення попиту на транспортування в умовах забезпечення мінімальних витрат

авіакомпанії, але не пропонують методику визначення оптимального складу повітряного парку з урахуванням пасажиромісткості ПС та собівартості перевезень [5-6].

Метою дослідження є визначення оптимального складу повітряного парку авіакомпанії для мінімізації вартості виконання авіаперевезень за умови максимального задоволення попиту на транспортування з урахуванням пасажиромісткості літаків та собівартості перельоту за певним маршрутом за допомогою методів комбінаторики та регресійного аналізу у середовищі MS Excel.

Виклад основного матеріалу. У вузькому сенсі комбінаторика представляє собою підрахунок різних комбінацій, які можна скласти з деякої безлічі дискретних об'єктів [1-2], у нашому випадку – ПС. Принципово важливо, що ці об'єкти піддаються підрахуванню (дискретність), та що серед них немає однакових.

Найпоширенішими видами комбінацій є перестановки об'єктів, їх вибірка з безлічі (поєднання) і розподіл (розміщення).

Визначимо максимальну ефективність авіаперевезень E у разі різної кількості ПС n_i різних типів m_j :

$$E = \max \min (y_i - y_{oi}), \tag{1}$$

де цільова функція:

$$y_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l c_{jk} x_{jk} \rightarrow \min; \tag{2}$$

$$y_{oi} = f(x_{jl}); \tag{3}$$

обмеження:

$$y_i - y_{oi} \leq 0; \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^m x_{jk} = a_j, \quad j = \overline{1, m}; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^l x_{jk} = b_k, \quad k = \overline{1, l}; \tag{6}$$

$$x_{jk} \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \tag{7}$$

де y_i, y_{oi} – відповідно фактична та очікувана мінімальні вартості перевезень; c_{jk} – собівартість перельоту на j -му типі ПС до k -го пункту призначення, у.о.; a_j – загальна кількість ПС n_i типу m_j , шт.; b_k – попит на пасажироперевезення до k -го пункту призначення за місяць, чол./міс.; x_{jk} – кількість ПС n_i типу m_j , яку необхідно виділити на k -ту повітряну лінію, шт.

Розглянемо приклад визначення оптимального складу повітряного парку авіакомпанії, яка має в наявності літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500 та виконує рейси за маршрутами Київ – Афіни, Київ – Ашхабад, Київ – Будапешт, Київ – Варшава.

Спрогнозуємо ефективність виконання авіаперевезень авіакомпанією з наявною різною комбінацією типів ПС за допомогою регресійного аналізу.

Для початку будемо вважати, що кількість літаків n_i різних типів m_j однакова ($n_i = const, m_j \neq const, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$):

$n_{1-4} = 1$ (маємо по 1 літаку типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500);

$n_{1-4} = 2$ (маємо по 2 літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500);

$n_{1-4} = 3$ (маємо по 3 літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500);

$n_{1-4} = 4$ (маємо по 4 літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500).

Для кожної комбінації отримана фактична (цільова функція y_i) та очікувана (регресія y_{oi}) мінімальна вартість перевезень за умов виконання накладених обмежень на обсяги пасажиропотоку та пасажиромісткість наявних ПС (табл. 1, рис. 1).

Видно, що у разі комбінації однакової кількості різних типів літаків максимальна ефективність виконання авіаперевезень авіакомпанією очікується при наявності трьох літаків чотирьох різних типів:

$E = \max \min (y_i - y_{oi}) = \max \min (4365; -3945; -5205; 4785) = -5205$ грн.;

$$y_i - y_{oi} \leq 0.$$

Результати регресійного аналізу
у разі комбінації однакової кількості різних типів літаків

№ з/п	Кількість ПС n_i типу m_j, x	Цільова функція y_i , грн.	Регресія, y_{oi} , грн.	Відхилення $(y_i - y_{oi})$, грн.
1	1111	42700	38335	4365
2	2222	77800	81745	-3945
3	3333	119950	125155	-5205
4	4444	173350	168565	4785

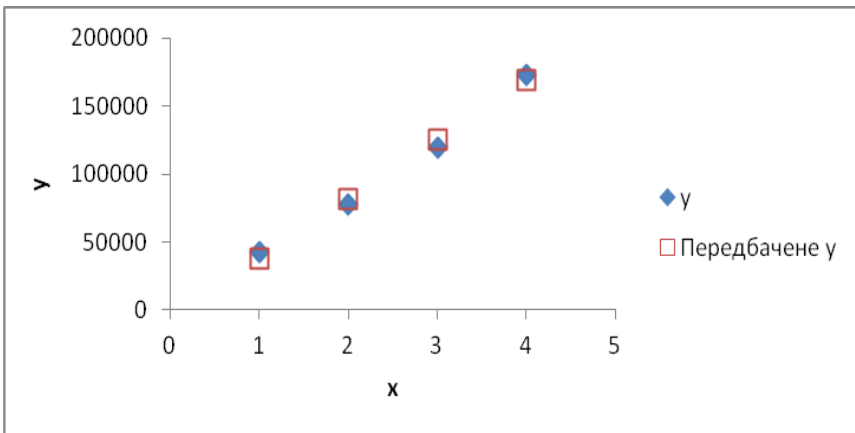


Рис. 1. Регресійний аналіз у разі комбінації однакової кількості різних типів літаків

Розглянемо результати регресійного аналізу вибірки з 11 можливих комбінацій літаків n_i різних типів m_j ($n_i \neq const, m_j \neq const, i = 1, m, j = 1, n$) за умови дозволу на відмінність порядку розташування та повторення елементів у групі (табл. 2, рис. 2).

Видно, що у разі комбінації різної кількості різних типів літаків максимальна ефективність виконання авіаперевезень авіакомпанією очікується при наявності двох літаків чотирьох різних типів:

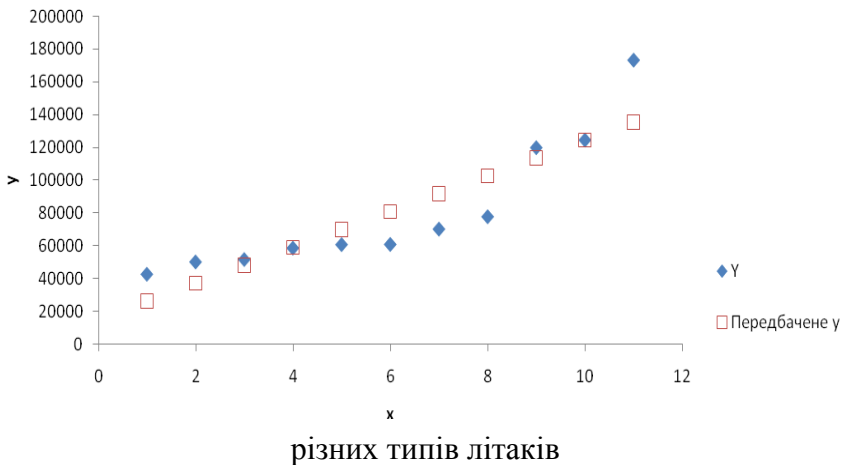
$E = \max \min (y_i - y_{oi}) = \max \min (16398; 12959; 3520; -418; -9257; -20095; -21684; -25073; 6139; 150; 37661) = -25073$ грн.;

$y_i - y_{oi} \leq 0$.

Результати регресійного аналізу
у разі комбінації різної кількості різних типів літаків

№ з/п	Кількість ПС n_i типу m_j, x	Цільова функція y_i , грн.	Регресія, y_{oi} , грн.	Відхилення $(y_i - y_{oi})$, грн.
1	1111	42700	26302	16398
2	2111	50200	37241	12959
3	1112	51700	48180	3520
4	2211	58700	59118	-418
5	1122	60800	70057	-9257
6	1113	60900	80995	-20095
7	1114	70250	91934	-21684
8	2222	77800	102873	-25073
9	3333	119950	113811	6139
10	4134	124600	124750	150
11	4444	173350	135689	37661

Рис. 2. Регресійний аналіз у разі комбінації різної кількості



Методом факторіалів (8) визначимо кількість можливих комбінацій літаків n_i різних типів m_j ($n_i \neq const, , m_j \neq const,$

$i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) за умови дозволу на відмінність порядку розташування та заборони повторів елементів у групі:

$$n_i = n! = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24. \quad (8)$$

Тобто, можна сформувати 24 групи, в яких кількість літаків кожного з чотирьох типів може змінюватись від одного до чотирьох.

Методом поєднання (9) визначимо кількість можливих комбінацій літаків n_i різних типів m_j ($n_i \neq const, m_j \neq const, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) за умови заборони на відмінність порядку розташування та повторів елементів у групі:

$$c_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1. \quad (9)$$

В нашому випадку можливий тільки один варіант поєднання літаків чотирьох різних типів у групу з чотирьох елементів.

Висновки і перспективи подальших пошуків. Методи комбінаторики та регресійного аналізу доцільно використовувати для прогнозування ефективності операційної діяльності авіакомпанії. Розроблена регресійна модель дозволяє знаходити оптимальний склад парку ПС для забезпечення мінімальної вартості авіаперевезень за умови максимального задоволення попиту на транспортування. Планується розрахунок мінімальної ефективності у разі різної кількості ПС різних типів.

Література

1. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – М : Наука, 1982. – 448 с.
2. Холл М. Комбинаторика / М. Холл. – М. : Мир, 1970. – 424 с.
3. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха ; пер с англ. – 7-е изд. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2007. – 912 с.

4. Прокудін Г. С. Моделі і методи оптимізації перевезень у транспортних системах : монографія / Г. С. Прокудін Г. С. – К. : НТУ, 2006. – 224 с.

5. Савченко Л. В. Підвищення ефективності прогнозування в транспортних системах : автореф. дис. ... канд. техн. наук. / Л. В. Савченко. – К., 2002. – 34 с.

6. Забара С. С. Автоматизована система управління транспортними перевезеннями / С. С. Забара, М. Т. Дехтярук // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2014. – № 2. – С. 18–28.

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН В АЕРОНАВІГАЦІЙНІЙ СИСТЕМІ

Шмельова Т.Ф., Сікірда Ю.В., Якуніна І.Л.

shmelova@ukr.net, iro4ka_777@mail.ru,

Національний авіаційний університет

Кіровоградська льотна академія НАУ

Аннотация. В работе найдены количественные значения переменных для оценки качественного показателя уровня риска принятия оператором аэронавигационной системы не оптимального решения на каждой из стадий развития полетной ситуации от нормальных условий полета до катастрофической с помощью теории нечетких множеств.

Abstract. Quantitative values of variables are calculated in the work. This is necessary to assess the qualitative indicator of the level of risk that the operator of the air navigation system does not make an optimal decision at each stage of the development of the flight situation - from normal flight conditions to catastrophic by the theory of fuzzy sets.

В разі виникнення ОВП умовно безпечно його завершення, головним чином, залежить від того які рішення будуть прийняті операторами аеронавігаційної системи (АНС) - екіпажем повітряного корабля (ПК) та диспетчером, під управлінням якого знаходиться даний ПК. Командир ПК несе відповідальність за прийняття остаточного рішення, яке б мінімізувало збитки та ризик появи цих збитків в результаті виникнення ОВП. На диспетчера покладено відповідальність за

видачу правильних та своєчасних рекомендацій екіпажу ПК. Для того, щоб рекомендація чи вказівка відповідала вище перерахованим якостям, а прийняте остаточне рішення було оптимальним диспетчеру та командирі ПК необхідно приймати рішення в умовах гострого дефіциту часу та неповноти і неточності інформації. В даній роботі пропоную розглянути прийняття рішення оператором АНС в умовах ризику, використавши апарат теорії нечітких множин.

Термін «прийняття рішення» в документах, що регламентують роботу операторів АНС, має цілком певний зміст та просторово-часове визначення: прийняття рішення про виліт, прийняття рішення про зліт на злітно-посадковій смузі, прийняття рішення про зміну маршруту польоту в разі виникнення особливого випадку в польоті, і т.д. Прийняття рішення означає оцінку ситуації та вибір одного з можливих варіантів дії. Оптимальне рішення ґрунтується на використанні якомога повної інформації про кожен варіант дій. До того ж, необхідно з усього об'єму зібраної інформації виокремити необхідну. Але у випадку прийняття рішення оператором АНС ускладнюючими факторами є швидкоплинність процесу, значне психофізіологічне та інтенсивне робоче навантаження.

В залежності від початкових даних, можна виокремити два діаметрально-протилежних випадки: прийняття рішення в умовах визначеності та прийняття рішення в умовах невизначеності. Рішення приймається в умовах визначеності, якщо людина яка приймає рішення, може точно визначити результат кожного альтернативного рішення, можливого в даній ситуації. Рішення, для яких неможливо ніяким чином оцінити ймовірність потенційних результатів, вважаються такими, які приймаються в умовах невизначеності. Між цими двома крайніми випадками знаходяться рішення, результати яких не є визначеними, але ймовірність кожного можливого результату можна поррахувати – це рішення які приймаються в умовах ризику. Ймовірність в такому випадку являтиме собою ступінь можливості здійснення даної події. В даній роботі настанням події будемо вважати перехід польотної ситуації у більш складну форму (ускладнена, складна, аварійна,

катастрофічна). Сума ймовірностей усіх альтернативних рішень дорівнює 1.

При виникненні особливого випадку в польоті оператор АНС суб'єктивно визначає рівень ризику, користуючись якісною шкалою. Оскільки для формалізації алгоритму прийняття рішення потрібні кількісні значення змінних, то для оцінки якісного показника рівня ризику використовуємо методи нечітких множин, а саме: розмістимо на шкалі значення лінгвістичної змінної «рівень ризику»:

1. дуже малий ризик (відповідає нормальним умовам польоту);
2. малий ризик (відповідає ускладненим умовам польоту);
3. середній ризик (відповідає складній ситуації);
4. великий ризик (відповідає аварійній ситуації);
5. дуже великий ризик (відповідає катастрофічній ситуації).

Припустимо, що мінімальний рівень ризику відповідає 0 одиниць, а максимальний відповідно 100 одиниць. Отриманий інтервал розіб'ємо на 10 відрізків. Ступінь приналежності деякого значення визначимо як відношення числа відповідей, в яких значення лінгвістичної змінної зустрічається у певному інтервалі, до максимального значення цього числа по всім інтервалам.

Опитування експертів проведено методом Делфі у два тури. В опитуванні взяли участь 35 експертів. Результати опитування представлені у таблиці 1.

Таблиця 1

Результати опитування експертів

Значення	Інтервал, одиниць									
	0-0,1	0,1-0,2	0,2-0,3	0,3-0,4	0,4-0,5	0,5-0,6	0,6-0,7	0,7-0,8	0,8-0,9	0,9-1
1	24	12	4	0	0	0	0	0	0	0
2	0	6	21	11	2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	3	7	21	9	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	11	18	11	0
5	0	0	0	0	0	0	0	3	13	24
k_j	24	18	25	14	9	21	20	21	24	24

Для обробки даних використаємо матрицю підказок, яка являє собою строку з елементами, що визначаються за формулою

$$k_j = \sum_{i=1}^5 b_{ij}, \quad j = \overline{1,10}. \quad (1)$$

Матриця підказок в нашому випадку має вигляд:

$$M = \parallel 24 \ 18 \ 25 \ 14 \ 9 \ 21 \ 20 \ 21 \ 24 \ 24 \parallel$$

Вибираємо з матриці підказок максимальний елемент

$$k_{max} = \max_j k_j = \max\{24; 18; 25; 14; 9; 21; 20; 21; 24; 24\} = 25$$

і перетворюємо елементи таблиці 1 згідно формули

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} k_{max}}{k_j}, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,10}.$$

Результати розрахунків заносимо до таблиці 2, на основі якої побудуємо функції приналежності.

Знайдемо в таблиці 2 построково максимальні елементи:

$$c_{i_{max}} = \max_j c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$c_{1_{max}} = 25,0; \quad c_{2_{max}} = 21,0; \quad c_{3_{max}} = 25,0; \quad c_{4_{max}} = 21,4; \quad c_{5_{max}} = 25,0.$$

Значення функції належності знайдемо за формулою

$$\mu = \frac{c_{ij}}{c_{i_{max}}}.$$

Таблиця 2

Обробка результатів опитування

Значення	Інтервал, одиниць									
	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
1	25,0	16,7	4,0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	8,3	21,0	19,6	5,6	0	0	0	0	0
3	0	0	0	5,4	19,4	25,0	11,3	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	13,8	21,4	11,5	0
5	0	0	0	0	0	0	0	3,6	13,5	25,0

Результати розрахунків представимо у таблиці 3.

Функції належності для кожного значення лінгвістичної змінної “Рівень ризику” зобразимо на рисунку 1.

Значення функції належності

Значення	Інтервал, одиниць									
	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
μ_1	1	0,67	0,16	0	0	0	0	0	0	0
μ_2	0	0,40	1	0,94	0,26	0	0	0	0	0
μ_3	0	0	0	0,21	0,78	1	0,45	0	0	0
μ_4	0	0	0	0	0	0	0,64	1	0,53	0
μ_5	0	0	0	0	0	0	0	0,14	0,54	1

З отриманої діаграми (рис.1), можна визначити кількісні показники, які відповідають значенням лінгвістичної змінної «Рівень ризику»:

- нормальним умовам польоту відповідає кількісне значення рівня ризику в 10;
- ускладненим умовам польоту – 35;
- складним умовам польоту – 60;
- аварійним ситуаціям – 80;
- катастрофічним ситуаціям – 100.

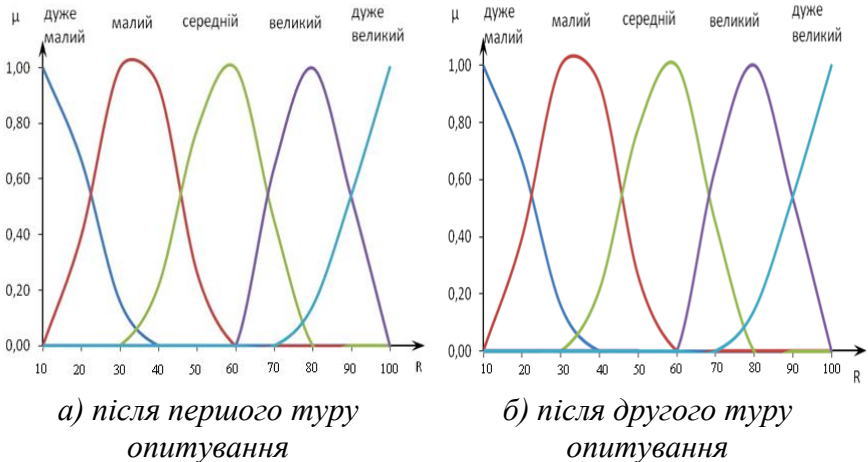


Рис. 1 Функції належності

Визначимо ступінь розділення 1 – α між нечіткими визначеннями рівня ризику для першого й другого турів експертного опитування (табл. 4).

Ступінь розділення між нечіткими визначеннями рівня
ризик

Лінгвістичні змінні, що оцінюються	Ступінь розділення $1 - \alpha$	
	Перший тур	Другий тур
<i>“Дуже малий ризик”/“Малий ризик”</i>	$1 - 0,545 = 0,455$	$1 - 0,560 = 0,440$
<i>“Малий ризик”/“Середній ризик”</i>	$1 - 0,540 = 0,460$	$1 - 0,561 = 0,439$
<i>“Середній ризик”/“Великий ризик”</i>	$1 - 0,540 = 0,460$	$1 - 0,547 = 0,453$
<i>“Великий ризик”/“Дуже великий ризик”</i>	$1 - 0,535 = 0,465$	$1 - 0,545 = 0,455$

Після проведення другого туру опитування ступінь розділення $1 - \alpha$ збільшилась, що свідчить про більш чітке визначення експертами наведених лінгвістичних змінних. Те, що отримані після першого туру кількісні показники рівня ризику не змінилися, дає підставу закінчити експертизу після проведення всього однієї ітерації.

Визначений коефіцієнт конкордації за Кендалом (після першого туру $W_1 = 0,961$, після другого туру $W_2 = 0,982$) свідчить про високу узгодженість думок експертів у групі.

Застосування функцій належності в умовах нечіткої інформації дозволяє формалізувати якісні характеристики рівня ризику для конкретної ситуації прийняття рішень. Маючи в розпорядженні значення експериментальних параметрів моделі, можна моделювати процес вибору оператором АНС оптимального варіанта з множини альтернатив для будь-якого ОВП і за будь-яких заданих умов.

В результаті ми отримали кількісне значення рівня ризику прийняття оператором АНС не оптимального рішення на кожній зі стадій розвитку польотної ситуації від нормальних умов польоту до катастрофічної. Отриману модель доцільно використовувати в системах підтримки прийняття рішень, що дасть можливість оператору АНС кількісно оцінювати можливі варіанти розвитку польотних ситуацій і оперативно вибирати стратегію дій з мінімальним рівнем потенційного збитку в умовах неповноти і невизначеності наявної інформації.

Література:

1. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей: Примеры использования. – Рига: Зинатне, 1990. - 184 с.
2. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций. 6-е издание. : Пер. с англ. — М. : Издательский дом "Вильямс", 2001. — 912 с
3. Харченко В. П. Прийняття рішень в соціотехнічних системах: монографія / В. П. Харченко, Т. Ф. Шмельова, Ю. В. Сікірда. – К. : НАУ, 2016. – 308 с.
4. Strategic Imperatives and Core Competencies in the Era of Robotics and Artificial Intelligence Chapter 9. Decision-Making Models of the Human-Operator as an Element of the Socio-Technical Systems / Nina Rizun, Tatyana Shmelova. - International Publisher of Progressive Information Science and Technology Research, USA, Pennsylvania. – November, 2016. – P. 167-204

ВИЗНАЧЕННЯ ЯКІСНИХ ПОКАЗНИКІВ ВИКОНАННЯ ДІЙ АВІАЦІЙНИМ СПЕЦІАЛІСТОМ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ

Шмельова Т.Ф., Якуніна І.Л.

shmelova@ukr.net , iro4ka_777@mail.ru ,

*Національний авіаційний університет
Кіровоградська льотна академія НАУ*

Аннотация. В работе выполнена оценка процесса диспетчерской тренажерной подготовки в случае отработки парирования особого случая в полете – отказ авиационного двигателя на взлете, если командир воздушного судна принял решение о продолжении взлета. Соответствие качественных показателей выполнения операционных процедур в процессе диспетчерской тренажерной подготовки найдено с помощью нечеткой логики.

Abstract. The estimation of controller's trainer preparation process in case of working off a parry of the special case in flight have been performed, - the aircraft engine's failure at take off if the pilot-in-command decided to continue take-off. Accordance of qualitative operational procedures performance

indicators in the process of controller's training preparation is found by means of fuzzy logic.

Будь-яка модель складної реальної системи повинна відображати, як правило, не тільки кількісні, а й якісні показники функціонування системи. Тому, моделюючи дії оператора аеронавігаційної системи, потрібно враховувати не тільки час виконання тієї чи іншої дії, кількість людських чи матеріальних ресурсів тощо, а й такі показники, як, наприклад, знання нормативних документів, знання з повітряної навігації та авіаційної метеорології, здатність застосувати необхідні знання в професійній діяльності.

Деякі якісні показники можна оцінювати кількісними безпосередньо, а деякі – за допомогою відповідних методів. Розглянемо методи нечіткої логіки стосовно визначення відповідності якісних показників виконання дій оператором аеронавігаційної системи кількісним.

За якісний показник візьмемо, наприклад, рівень володіння авіаційним спеціалістом певними професійними навичками, який оцінюватимемо значеннями лінгвістичної змінної: 1) відмінно; 2) добре; 3) задовільно.

Відповідні кількісні показники отримаємо, використовуючи апарат нечіткої логіки. Для прикладу дослідимо оцінку процесу диспетчерської тренажерної підготовки у випадку відпрацювання парирування особливого випадку в польоті - відмова авіаційного двигуна на зльоті, якщо командир повітряного судна прийняв рішення зліт припинити. Вище було отримано критичний час, який склав 84,7 с. Оскільки цей час було визначено опираючись на результати експерименту, в якому взяли участь курсанти з високим рівнем підготовки, то час 80 с визначимо як найменший, за який курсант може парирувати даний особливий випадок. Додамо для запасу можливого перевищення часу, до отриманих 80 с ще 100 с, і розіб'ємо отриманий інтервал на 10 відрізків: 80-90; 90-100; 100-110; 110-120; 120-130; 130-140; 140-150; 150-160; 160-170; 170-180 секунд. На отриманій шкалі розмістимо значення лінгвістичної змінної «рівень засвоєння/встигання»: відмінно, добре, задовільно. В анонімному індивідуальному опитуванні

взяли участь 32 респонденти за спеціальністю – авіадиспетчери. Замкнуте опитування, при якому неможливий тиск авторитетом”, дозволив не враховувати при підборі експертів їх психологічні якості (н-д сумісність, комунікабельність).

Для кількісного визначення значень термів експертам пропонувалось визначити найбільше значення часу, отримане курсантом, за якого ще ставиться певна оцінка.

Для отримання більш достовірних значень термів опитування проводилось за найбільш ефективним методом анкетування – методом Дельфі [1], при якому відмовляються від колективного обговорення питань і забезпечують експертів інформацією після кожного етапу опитування зі зберіганням анонімності - у два тури.

Таблиця 1

Статистика даних, отриманих після проведення I туру опитування

№ лінгвістичної змінної	Інтервал, одиниць									
	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	170-180
1	12	14	6	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	14	18	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	9	15	5	3	0	0	0
k_j	12	14	20	27	15	5	3	0	0	0

Оскільки останні три стовпця таблиці не несуть якісної інформації, виключимо їх з подальшого розгляду.

Ступінь приналежності деякого значення визначимо як відношення числа відповідей в яких значення лінгвістичної змінної «рівень засвоєння» зустрічається у певному інтервалі, до максимального значення цього числа по всім інтервалам.

Для обробки даних використаємо матрицю підказок, яка являє собою рядок з елементами, що визначаються за формулою 1:

$$k_j = \sum_{i=1}^3 b_{ij}, \quad j = \overline{1,10}. \quad (1)$$

Матриця підказок в нашому випадку має вигляд:

$$M = \|\|12 \ 14 \ 20 \ 27 \ 15 \ 5 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0\|\|$$

Вибираємо з матриці підказок максимальний елемент
 $k_{max} = \max_j k_j = \max\{12; 14; 20; 27; 15; 5; 3; 0; 0; 0\} = 27$

і перетворюємо елементи таблиці 1 згідно формули 2:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} \cdot k_{max}}{k_j}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 10}. \quad (2)$$

Результати розрахунків занесемо до таблиці 2.

Для побудови функцій належності знаходимо максимальні елементи в рядках таблиці 2:

$$c_{imax} = \max_j c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$c_{1max} = 27,0; \quad c_{2max} = 18,9; \quad c_{3max} = 27,0;$$

Таблиця 2

Проміжні значення для побудови функцій належності після проведення I туру опитування

№ лінгвістичної змінної	Інтервал, одиниць						
	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
1	27	27	8,1	0	0	0	0
2	0	0	18,9	18	0	0	0
3	0	0	0	9	27	27	27

Функції належності вираховуються за формулою (4):

$$\mu_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{imax}}. \quad (4)$$

Результати, отримані після проведення першого туру опитування, наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Результати, отримані після проведення I туру опитування

μ_{ij}	Інтервал, одиниць						
	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
μ_{1j}	1	1	0,3	0	0	0	0
μ_{2j}	0	0	1	0,95	0	0	0
μ_{3j}	0	0	0	0,33	1	1	1

Функції належності для кожного значення лінгвістичної змінної “результат засвоєння” представлені на рисунку 1 (а).

З наведених графіків можна визначити кількісні показники, які виражають якісні характеристики «результату засвоєння»:

- «відмінно» відповідає кількісне значення 85 секунд;
- «добре» відповідає кількісне значення 105 секунд;
- «задовільно» відповідає кількісне значення 120 секунд.

Результати та обчислення для побудови функцій належності, після проведення другого туру опитування, визначено аналогічним чином. На рисунку 1 (б) зображено функції належності термів лінгвістичної змінної “рівень засвоєння”, отримані після другого туру експертного опитування.

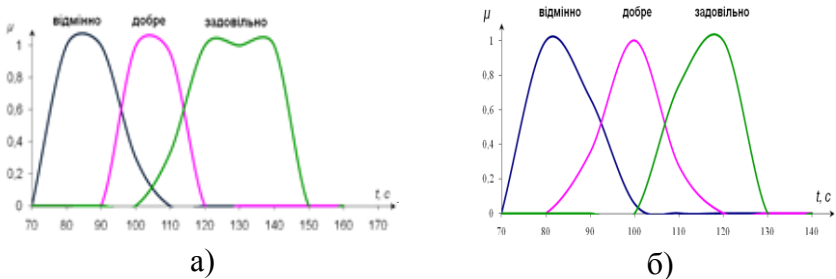


Рис. 1 Функції належності терм – множини “рівень засвоєння”, отримані після проведення першого туру опитування (а), та після проведення другого туру опитування (б)

Визначимо ступінь розділення $(1 - \alpha)$ [2] між нечіткими визначеннями рівня засвоєння для першого й другого етапів експертизи (таблиця 4).

Таблиця 4

Визначення ступеня розділення між нечіткими визначеннями рівня засвоєння

Лінгвістичні змінні, що оцінюються	Ступінь розділення $1 - \alpha$	
	Перший тур	Другий тур
“Відмінно” / “Добре”	$1 - 0,6 = 0,4$	$1 - 0,520 = 0,480$
“Добре” / “Задовільно”	$1 - 0,6 = 0,4$	$1 - 0,511 = 0,489$

Після проведення другого туру опитування ступінь розділення $(1 - \alpha)$ збільшилась, що свідчить про більш чітке визначення експертами наведених лінгвістичних змінних. Те, що отримані після першого туру кількісні показники «рівня засвоєння» не змінилися, дає підставу закінчити експертне опитування після проведення всього однієї ітерації.

Оскільки результати визначення рівня засвоєння кожним з 32 експертів є деякою випадковою величиною, тому доцільно

для аналізу якості застосувати методи математичної статистики [1].

Колективну думку експертів щодо i -го терму, визначимо за формулою (5):

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{j=1}^m R_{ji}}{m}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де R_{ji} – значення, яке j -й експерт приписує i -му терму, $j = \overline{1, m}$; m – кількість експертів, $m = 32$; n – кількість термів, $n = 3$.

Середньоквадратичне відхилення визначимо за формулою (6):

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (\bar{R}_i - R_{ji})^2}{m}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Коефіцієнт варіації (7):

$$v_i = \frac{\sigma_i}{\bar{R}_i} \cdot 100\%, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.10)$$

Отримані статистичні характеристики I та II турів опитування представлено в таблиці 5

Отримане значення коефіцієнту варіації $v_i < 30\%$ свідчить про високу якість отриманих результатів за допомогою даного експертного опитування.

Таблиця 5

Статистичні характеристики експертного опитування

	відмінно, $i = 1$	добре, $i = 2$	задовільно $i = 3$
I тур опитування			
\bar{R}_i	88,13	105,63	120,63
D_i	54,44	25,40	83,47
δ_i	7,38	5,04	9,14
v_i	8,37	4,77	7,57
II тур опитування			
\bar{R}_i	85,00	100,31	112,81
D_i	32,26	48,29	20,87
δ_i	5,68	6,95	4,57
v_i	6,68	6,93	4,05

В результаті отримали, що оцінки «відмінно» заслуговує курсант, який парирував особливий випадок за 85 с, «добре» - за 100,3с, та «задовільно» - за 112,8с. Оцінка «незадовільно» виставляється якщо час на парирування особливого випадку перевищує 112, 8 с.

Література:

1. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико–статистические методы экспертных оценок. – 2-е изд. – М.: Статистика, 1980. – 263 с.;

2. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения: Пер. с англ. / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.

3. Шульгін В.А. Нечіткі моделі атестації льотного складу за точністю пілотування на льотних тренажерах: автореферат дис...канд. технічних наук, НАУ, Київ 2008

4. Харченко В. П. Прийняття рішень в соціотехнічних системах: монографія / В. П. Харченко, Т. Ф. Шмельова, Ю. В. Сікірда. – К. : НАУ, 2016. – 308 с.

РЕГУЛЯРНОСТЬ ПОЛУГРУППЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ЗАДАННОЕ БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Ярошевич В.А.

v-yaroshevich@ya.ru,

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Аннотация. Бинарные отношения можно трактовать, как многозначные операции, а полугруппу бинарных отношений — как полугруппу многозначных отображений с операцией суперпозиции. Если на множестве, на котором действует многозначное отображение, задан порядок или эквивалентность, то можно говорить о сохранении порядка или эквивалентности при многозначном отображении. В работе приведены частные случаи сохранения некоторых бинарных отношений, когда полугруппа многозначных отображения регулярна.

Abstract. It is possible to understand binary relations as multi-value mappings. We can also consider the semigroup of binary relations as the semigroup of multi-value mappings with operation of superposition. Suppose the domain of a multi-value mapping has an order or equivalence. We can say that multi-value mapping retain the order or the equivalence. We consider partial cases of retaining of a binary relation when the semigroup of multi-value mapping is regular.

Пусть $\sigma \subseteq X \times X$ — бинарное отношение на множестве X и $\alpha \in T(X)$ — отображение X в X .

Определение 1 *Отображение α сохраняет σ , если*

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma.$$

Отображение α можно рассматривать как бинарное отношение:

$$(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow x\alpha = y. \tag{1}$$

Несложно проверить ([1, предложение~1]), что свойство отображения α сохранять σ эквивалентно

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma \tag{2}$$

(в смысле произведения бинарных отношений).

Исследованию свойств полугруппы отображений $T_{\square}(X)$, сохраняющих частичный порядок \square , посвящено много работ. В работе [2] получено описание частично упорядоченных множеств X , у которых полугруппа изотонных преобразований $T_{\square}(X)$ регулярна. В работе [1] были описаны упорядоченные и квазиупорядоченные множества X с регулярной полугруппой частичных изотонных преобразований $PT_{\square}(X)$. В [3] описано строение частично упорядоченных множеств X , у которых полугруппа изотонных преобразований, сохраняющих порядок на множестве X , слабо регулярна в широком смысле.

Для частичного отображения $\alpha \in PT(X)$ множества X в X , сохраняющего σ , включение (2) неверно. В связи с этим можно определить двумя различными неэквивалентными способами, что означает фраза « $\alpha \in PT(X)$ сохраняет $\sigma \subseteq X \times X$ ». А именно,

Определение 2 $\alpha \in PT(X)$ допустимо для $\sigma \subseteq X \times X$, если

$$\forall x, y \in \text{dom } \alpha = X\alpha^{-1} \quad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma.$$

Определение 3 $\alpha \in PT(X)$ согласуется с $\sigma \subseteq X \times X$, если $\alpha\alpha \subseteq \alpha\sigma$.

Пусть $PT_\sigma(X)$, — множество всех допустимых для σ частичных отображений на X . $\square PT_\sigma(X)$ — множество всех согласующихся с σ частичных отображений на X . Очевидно, $PT_\sigma(X)$ и $\square PT_\sigma(X)$ — моноиды, являющиеся подмоноидами моноида $PT(X)$. В [1, предложение 2] доказано, что $\square PT_\sigma(X) \subseteq PT_\sigma(X)$.

Рассмотрим теперь более общий случай многозначных отображений. Всякое многозначное отображение α аналогично (1) можно рассматривать как бинарное отношение. Понятие многозначного отображения обобщает понятие частичного отображения, поэтому появляется более широкий простор для того, как понимать сохранение бинарного отношения σ при многозначном отображении. Предложим три определения.

Определение 4 Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ согласуется с σ , если $\alpha\alpha \subseteq \alpha\sigma$.

Определение 5 Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ сохраняет σ в широком смысле, если

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (\exists u \in x\alpha \quad \exists v \in y\alpha : (u, v) \in \sigma).$$

Определение 6 Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ сохраняет σ в узком смысле, если

$$\forall x, y \in X \quad \forall u, v \in X \quad (u \in x\alpha \ \& \ v \in y\alpha \ \& \ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (u, v) \in \sigma).$$

Стоит отметить, что из сохранения σ в широком смысле в общем случае не следует сохранение σ в узком смысле. Множества бинарных отношений, удовлетворяющих каждому из последних трёх определений в отдельности, обозначим B_σ ,

B'_σ и B''_σ соответственно. Эти три множества являются полугруппами относительно операции умножения бинарных отношений. Далее сформулируем результаты, связанные с регулярностью этих полугрупп.

Теорема 1 Для цепи X такой, что $|X| \geq 2$, полугруппа $B_\sigma(X)$ не является регулярной.

Теорема 2 Для любого отношения эквивалентности σ , заданного на множестве X таком, что $|X| \geq 3$, полугруппа $B_\sigma(X)$ является нерегулярной.

Теорема 3 Пусть X — множество с заданным бинарным отношением σ и $|X| \geq 3$. Тогда полугруппа бинарных отношений $B'_\sigma(X)$ нерегулярна.

Теорема 4 Пусть X — множество такое, что $|X| \geq 3$, а σ — заданное на X отношение эквивалентности. Полугруппа $B''_\sigma(X)$ регулярна в том и только в том случае, когда σ — отношение равенства на множестве X .

Литература

1. Ярошевич В. А. О свойствах полугрупп частичных изотонных преобразований квазиупорядоченных множеств // Вестник МГАДА. 2011. № 3. С. 139–144.
2. Айзенштат А. Я. Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. 1968. Т. 387. С. 3–11.
3. Ким В. И., Кожухов И. Б., Ярошевич В. А. Слабо регулярные полугруппы изотонных преобразований // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. Вып. 4. С. 145–165.

СТРУКТУРА ГРАФА D_4 ЯК ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРА

Антончик М. П.

Центральноукраїнський національний технічний університет

Анотація. Наведена структура D_4 -9-ти вершинної граф-обструкції для тора

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 8-ми та 9-ти вершинних, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результат ототожнення по підмножинам множин вершин одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ та квазізірки з центральним графом G . Наведений повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в [2].

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S . Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S)+1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Лема 1. Для графу D_4 як 9-вершинного графу-обструкції для тору має місце наступні ϕ -перетворення: або $K_{4,5} \setminus u = D_4$, причому D_4 містить підграф ізоморфний графу E_{18}

неорієнтовного роду 1, або $\phi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_4, \{i'_1\}^6)$, де

$$K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^6, K = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a, b, c\}, K_{2,3}^1 \cup \{(a, 2''), \{(b, j'')\}_{j=4}^6\}).$$

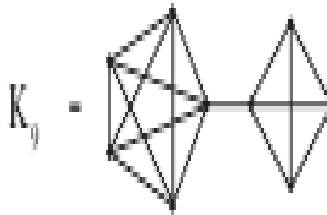
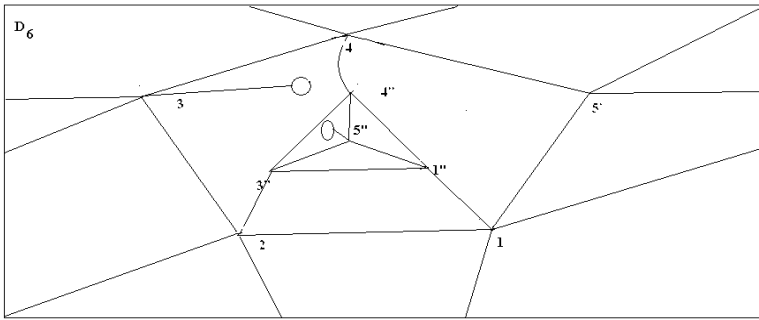


Рис.1. Вкладення графа D_4 в 2-тор та його доповнення.

Таким чином наведена структура 9-ти вершинного графа D_4 -обструкції для тору з метою використання при побудові багатoverшинних графів-обструкцій для тору.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, – 1971, – 378с.
2. Hur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10». Інтернет-ресурс PhD dissertation, Ohio State University, - 2008.

ГРАФИ-ОБСТРУКЦІЇ НА 8-МИ ВЕРШИНАХ

Демченко Д.О.

Центральноукраїнський національний технічний
університет

Анотація. Наведені графи на 8-ми вершинах, що є граф-обструкціями для тора

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 8-ми вершин них, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результат ототожнення по підмножинам множин вершин одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ та квазізірки з центральним графом G . Наведений повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в [2]. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S . Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S)+1$.

Твердження 1. Для B_1, B_2, B_3 неізоморфних 8-ми вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні ϕ -перетворення:

$$1) \quad \phi(K_5 + St_{5,5,5}(\overline{K_3}), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_1, \{i\}_{i=1}^5), \quad \text{де } St_{5,5,5}(\overline{K_3}) -$$

квазізірка з центром з трьох несуміжних між собою вершин, які мають по п'ять висячих ребер із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із кожною вершиною з множини

$\{1'',2'',3'',4'',5''\}$, а потім з вершинами $\{1',2',3',4',5'\}$ графа K_5 ,

$$St_{5,5,5}(\overline{K_3}) = \bigcup_{j=1}^3 St_5(j);$$

$$2) \quad \varphi(K_5 + St_{3,4,4}(K_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_2, \{i\}_{i=1}^5), \quad \text{де } St_{3,4,4}(K_3)$$

квазізірка з центром з трьох суміжних між собою вершин, одна з яких має три висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюються із вершинами $1',2',3'$ графа K_5 , а дві інші вершини матимуть по чотири висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із однією з вершин $1',2'$ та трьома вершинами $3',4',5'$ графа K_5 , причому множина вершин $St_{3,4,4}^0(K_3)$ породжує підграф K_4 , $K_4^0 = \{1'',2'',3'',5''\}$ із трикутником K_3 одне ребро якого має ще два кратних 1-підрозділених виділеними точками $3'',4''$, а два інших ребра цього K_3 мають по одному кратному ребру 1-під-розділеному виділеними точками $1'',2''$;

$$3) \quad \varphi(K_5 + St_{2,2,5}(K_3), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (B_3, \{i\}_{i=1}^5), \quad \text{де } St_{2,2,5}(K_3)$$

квазізірка з центром з трьох суміжних між собою вершин, одна з яких має п'ять висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюються із вершинами $1',2',3',4',5'$ графа K_5 , а дві інші вершини матимуть по два висячих ребра із кінцевими вершинами, кожна з яких ототожнюється із однією з вершин $1',2'$ графа K_5 , причому множина вершин $St_{2,2,5}(K_3)$ породжує підграф K_5 . Іншими словами B_3 є парою графів K_5 склеєною по трикутнику.

В залежності від задіяних підмножин вершин та їхніх характеристик кратності та багатосторонності множини вершин графу K_5 граф-обструкція порядку 8 є φ -образом K_5 та графа H , де граф H є одним з трьох варіантів:

1) є об'єднанням трьох однакових зірок із несуміжними центрами та п'ятьма променями,

2) є квазізіркою з центром-графом $K_5 \setminus e$ з трьома трикутними променями та двома висячими, які підлягатимуть стисненню в точку,

3) є квазізіркою з центром-графом K_5 із п'ятьма променями з яких два підлягатимуть стисненню в точку.

Висновок. Таким чином наведено структуру 8-вершинних графів-обструкцій для тору з метою використання при побудові багатoverшинних графів-обструкцій для тору.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, - 378с.

2. Nur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10». Інтернет-ресурс PhD dissertation, Ohio State University, 2008

D₇-9-ТИ ВЕРШИННА ГРАФ-ОБСТРУКЦІЯ ДЛЯ ТОРА

Недоп'ч Е.М.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Анотація. Наведена D₇-9-ти вершинна граф-обструкція для тора.

Розглянемо задачу подання графів-обструкцій роду 2 на 9-ти вершинних, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату ототожнення по підмножинам множин вершин одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ та квазізірки з центральним графом G . Наведений в [1] повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в он лайн РНД-дисертації Nur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10».

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Твердження 1. Для графа D_7 як 9-вершинної графа-обструкції для тору має місце наступне ϕ -перетворення:

$$1) \quad \phi(K_5 + St_{1,1,1(2)}(K_4), \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (D_7, \{i\}_{i=1}^3), \quad \text{де} \quad K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5,$$

$$St_{1,1,1(2)}^0(K_4) = \{i''\}_{i=1}^3 \cup K_4^0.$$

Таким чином наведено структуру 9-ти вершинного графа-обструкції для тору з метою використання при побудові багатoverшинних графів-обструкцій для тору.

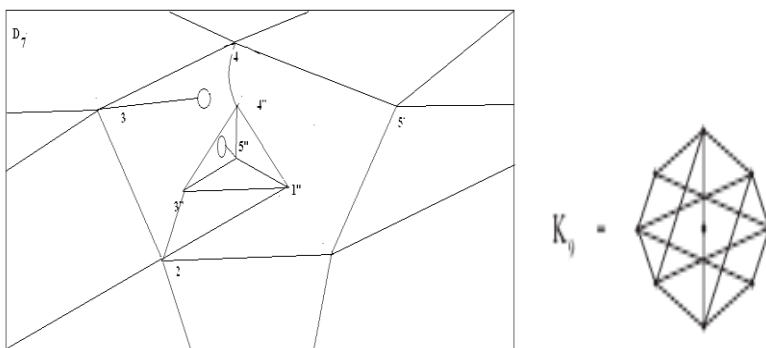


Рис.1. Граф D_7 2-неприведений для тору та його доповнення.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971,378с.

2. Hur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10». Інтернет-ресурс PhD dissertation, Ohio State University, 2008.

СТРУКТУРА ГРАФІВ D_5 І D_6 - ОБСТРУКЦІЙ ТОРА

Сахарова А.В.

Центральноукраїнський національний технічний
університет

Анотація. Наведені графи D_5 і D_6 на 9-ти вершинах, що є граф-обструкціями для тора

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 8-ми та 9-ти вершинних, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результат ототожнення по підмножинам множин вершин одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ та квазізірки з центральним графом G . Наведений [2] повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в онлайн РНД-дисертації Hur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10». Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S . Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S)+1$.

Лема 1. Для графів D_5, D_6 як 9-вершинних графів-обструкцій для тору мають місце наступні ϕ -перетворення:

$$1) \quad \phi(K_{3,3} + St_{3(2)}(K_{2,3}) \cup St_3(9), \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_5, \{i\}_{i=1}^6), \quad \text{де}$$

$St_{3(2)}(K_{2,3}) \cup St_3(9) = \{i''\}_{i=1}^6 \cup \{7,8\}$, $St_3^0(9) = \{i''\}_{i=1}^3$, причому D_5 містить підграф ізоморфний E_3 , або E_{18} , що не проективними графами;

$$2) \quad \varphi(K_5 + St_{1(4)}(K_4), \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_6, \{i'_{i=1}\}), \quad \text{де}$$

$$St_{1(4)}^0(K_4) = \{i''\}_{i=1}^4 \cup K_4^0.$$

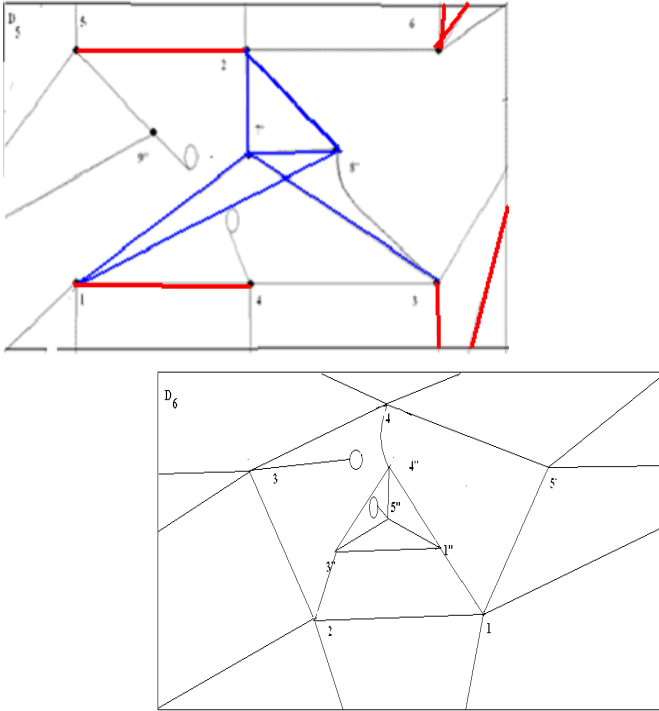


Рис.1. Вкладення графів D_5 , D_6 в 2-тор.

Висновок: наведено структуру 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору з метою використання при побудові графів-обструкцій для тору.

Література

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, -1971, - 378с.

2. Nur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10». Інтернет-ресурс PhD dissertation, Ohio State University, - 2008

ГРАФ D_8 ЯК ОБСТРУКЦІЯ ДЛЯ ТОРА

Суржик С.А.

Центральноукраїнський національний технічний
університет

Анотація. Наведено граф D_8 на 9-ти вершинах, що є граф-обструкцією для тора

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 9-ти вершинних, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату ототожнення по підмножинам множин вершин одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ та квазіірки з центральним графом G . Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Наведений повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в [1]. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$. Визначення 2. Граф G є мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S . Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S)+1$.

Лема 1. Для графу D_8 як 9-вершинного графу-обструкції для тору має місце наступні ϕ -перетворення: 1)

$$\phi(K_5 + St_{2(2)}(K_4), \sum_{i=2,4} (i' + i'')) \rightarrow (D_8, \{i\}_{i=2,4}), \quad \text{де} \quad K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5,$$

$St_{2(2)}^0(K_4) = \{i''\}_{i=2,4} \cup K_4^0$ -множина вершин графа K_5 із однією розщепленою вершиною.

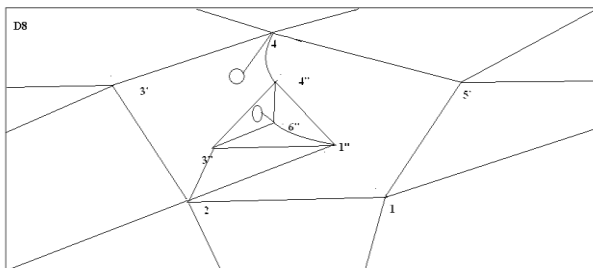


Рис.1. Вкладення графа D_8 в 2-тор та його доповнення.

Висновок: наведено структуру 9-ти вершинного графа-обструкції для тору з метою використання при побудові багатовершинних графів-обструкцій для тору

Література

1. Hur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10». Інтернет-ресурс PhD dissertation, Ohio State University, - 2008

Кіровоградська льотна академія
 Національного авіаційного університету
 Видавництво м. Кропивницький,
 вул. Добровольського, 1
 тел. 394-437.