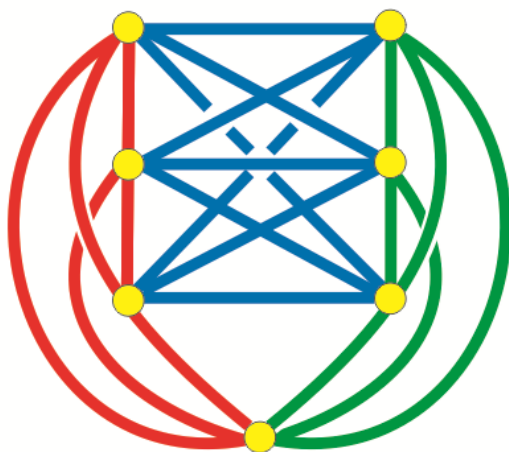


*Комбінаторні конфігурації
та їх застосування*

15-16 квітня 2016 року



Кіровоград
2016

УДК 519.1+519.7+510

ББК

Матеріали Вісімнадцятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (Кіровоград, 15–16 квітня 2016 року) / За ред. д. ф.-м. н., проф. Донець Г.П. – Кіровоград, 2016. – 149 с.

Засновник семінару – Державна льотна академія України

Редакційна колегія:

Відповідальний редактор

Донець Георгій Панасович – доктор фізико-математичних наук,
професор, зав. відділом Інституту
кібернетики НАН України

Члени редколегії:

Авраменко О.В. – д.ф.-м.н., завідувач каф. прикладної математики та інформатики
КДПУ ім. Володимира Винниченка

Бєлявська Г.Б. – к.ф.-м.н., ст. н.с. Інституту математики та інформатики Академії Наук
Молдови

Бондар О. П. – к.ф.-м.н., доцент каф. фізико-матем. наук КЛА НАУ

Воблій В.А. – д.ф.-м.н., доцент Московського державного технічного університету
ім. Баумана

Волков Ю.І. – д.ф.-м.н., професор, завідувач каф. математики КДПУ
ім. Володимира Винниченка

Гамалій В.Ф. – д.ф.-м.н., професор, завідувач каф. екон. кібернетики і маркетингу
КНТУ

Козін І.В. – д.ф.-м.н., доцент кафедри економічної кібернетики Запорізького
національного університету

Петренюк А. Я. – д.ф.-м.н., професор каф. БДМБ КНТУ

Рєвякин А.М – к.ф.-м.н., професор, Московский государственный институт
электронной техники (технический университет)

Сопронюк Ф.О. – д.ф.-м.н., професор, декан факультету комп'ютерних наук
Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича

Філер З.Ю. – д.т.н., к.ф.-м.н., професор каф. математики КДПУ ім. Володимира
Винниченка

Шендеровський В.А. – д.ф.-м.н., професор, віце-президент Українського фізичного
товариства (м. Київ)

Ясинський В.К. – д.ф.-м.н., професор, завідувач каф. теорії ймовірності
Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича

Організаційний комітет:

Голова – Семенюта М.Ф., к.ф.-м.н., доцент, КЛА НАУ

Відповідальний секретар – Петренюк В.І., к.ф.-м.н., доцент, КНТУ

Члени оргкомітету:

Вороненко А.А. – д.ф.-м.н., професор МГУ

Виврот Т.М. – кандидат фіз.-мат. наук, Центр досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки НАН України

Гамалій В.Ф. – д.ф.-м.н., професор, зав. кафедри економічної кібернетики і маркетингу КНТУ

Дресв О.М. – викладач кафедри програмного забезпечення КНТУ

Ізвалов О.В. – к.т.н., ст. викладач кафедри інформаційних технологій КЛА НАУ

Настоящий В.А. – к.т.н., професор, завідувач кафедри будівельних дорожніх машин та будівництва КНТУ

Неділько С.М. – д.т.н., професор КЛА НАУ

Петренюк А.Я. – д.ф.-м.н., професор каф. БДМБ КНТУ

Петренюк Л.П. – к.ф.-м.н.

Смірнов О.А. – д.т.н., завідувач кафедри програмного забезпечення КНТУ

Якименко С.М. – к.ф.-м.н., зав. кафедри вищої математики КНТУ

ЗМІСТ

Бакурова А. В.

Запорізький національний технічний університет

Комбінаторні оцінки збалансованості централізації в управлінні

9

Бондарь О. П.

Кировоградская летная академия НАУ

Граф Кронрода-Риба в топологии многообразий

13

Буй Д.Б., Шишацька О.В., Fabunmi S., Mohammed K.

Киевський національний університет ім. Т. Шевченко

Математические основания множественного наследования: рефлексивно-транзитивное замыкание

17

Воблый В. А., Кононенко Д. А.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

О производных высшего порядка от суперэкспоненты

31

Воблый В. А., Мелешко А. К.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Перечисление помеченных непланарных тетрациклических графов

33

Глухов О. Д.

Національний авіаційний університет

Про квазівипадкові графи логарифмічного степеня

36

Давидовский М. В.

Запорожский национальный университет

Фрагментарная модель задачи согласования онтологий

38

Донець Г. П.

Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова

Національної академії наук України

Комбінаторні алгоритми підтримки прийняття управлінських рішень

47

Дресєва Г.М., Дресєв О. М.

Кіровоградський національний технічний університет

Проблеми пошуку фрактальної розмірності числової послідовності

56

Емец О. А., Барболина Т. Н. <i>Полтавский университет экономики и торговли, Полтавский национальный педагогический университет им.В.Г.Короленка</i>	
Лексикографическая комбинаторная оптимизация дробно- линейной функции на размещениях	60
Ізвалов О. В. <i>Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету</i>	
Алгоритм пошуку самоописуючої нумерації графу	68
Козин И. В., Ботовский С. Е. <i>Запорожский национальный университет</i>	
О генерации случайных графов	71
Козин И. В., Полюга С. И. <i>Запорожский национальный университет</i>	
Муравьиный алгоритм для оптимизационных задач на фрагментарной структуре	75
Кривцун Е. В. <i>Запорожский национальный университет</i>	
Проблема минимального множества аксиом	81
Лісковець С. М., Шендеровський В. А. <i>Луцький національний технічний університет Інститут фізики НАН України</i>	
Творець програми польоту на Місяць	86
Мелешко Є.В. <i>Кіровоградський національний технічний університет</i>	
Аналіз структури соціальної мережі з точки зору інформаційної безпеки	93
Минайленко Р.М., Михайлов С.В. <i>Кіровоградський національний технічний університет</i>	
Застосування кластерних технологій для підтримання дієздатності комп'ютерних систем	97
Нагорный А. С. <i>Московский государственный университет им.М. В. Ломоносова, Московский физико-технический институт</i>	

О пересечениях предполных классов четырехзначной логики из объединения семейств M и U	99
Петренюк В. І., Гермак В.С. <i>Кіровоградський національний технічний університет</i>	
Структура непроективных графів-обструкцій	103
Петренюк В. І., Петренюк А. Я., Хох В. Д. <i>Кіровоградський національний технічний університет</i>	
Про структуру 10-ти вершинних графів-обструкцій для тора	128
Ревякин А. М., Исаченко А. Н. <i>Национальный исследовательский университет «МИЭТ» Белорусский государственный университет</i>	
Отображения матроидов и их обобщения	135
Семенюта М. Ф. <i>Кіровоградська льотна академія НАУ</i>	
Про дистанційну антимагічну розмітку циркулянтного графа $C_{2p+2}(2, 3, \dots, p-1, p+1)$	141
Смирнов А. А., Коваленко А. В. <i>Кировоградский национальный технический университет</i>	
Структурная идентификация рисков разработки программного обеспечения	145
Смирнов А. А., Смирнов С. А., Дидык А. К. <i>Кировоградский национальный технический университет</i>	
Разработка способа контроля линий связи телекоммуникационной системы для облачных антивирусов	152
Терещенко Э. В., Корнеева Е.В. <i>Запорожский национальный технический университет</i>	
Исследование разрешимости многокритериальной задачи о совершенном паросочетании алгоритмами линейной свертки критериев	156
Тимофієва Н. К. <i>Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України</i>	
Комбінаторні конфігурації в задачі розпізнавання мовлення	161

Турчина В.А.

*Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара*

Метод розв'язання двохкритеріальної задачі паралельного
упорядкування, заснований на виділенні основного критерію 169

Хох В.Д.

Кіровоградський національний технічний університет

Розробка механізму простору імен експертної системи
“VINE” 172

Шевченко К. М.

*Кіровоградський державний педагогічний університет
ім. В. Винниченка*

Будова основних 4-регулярних гамільтоново розкладних
графів 174

Шерман З. А.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины

Квадратная разностная разметка некоторых конструкций
графов 177

Мелешко Є.В., Якименко М.С.

Кіровоградський національний технічний університет

Клітинні автомати в задачах механіки 179

Коганов Л.М.

*Научный Центр нелинейной волновой механики и технологии
РАН*

Обращение одного степенного ряда 181

КОМБІНАТОРНІ ОЦІНКИ ЗБАЛАНСОВАНOSTI ЦЕНТРАЛІЗАЦІЇ В УПРАВЛІННІ

Бакурова А. В.

abaka11@yandex.ru,

Запорізький національний технічний університет

Аннотация. В работе проведен сравнительный анализ структур социально-экономических систем на основе информационного и комбинаторного подходов. Более подробно рассмотрены два крайних, с точки зрения централизации управления, случая: иерархия и гетерархия.

Abstract. The comparative analysis of structures of the socio-economic systems is conducted on the basis of informative and combinatorics approaches. In more detail considered two extreme, from the point of view of centralization of management, case: hierarchy and heterarchy.

Якість, ефективність функціонування соціально-економічної системи залежить не тільки від її елементів, а й від способу їхньої організованості, тобто від її структури. Структура соціально-економічної системи формується відповідно до умов її функціонування, тому є рухливою.

Відповідно до послідовного підвищення рівня централізації системи виділяють основні типи структур: мережна, лінійна (конвеєр), остовна, ієрархічна. Для реальних соціально-економічних систем, які на сучасному етапі все більше втрачають риси жорсткої ієрархії й переходять до мережевої структури, властива особлива ієрархічність, коли елементи (або зв'язки між елементами) структури впорядковані за часом їх появи. Особливістю таких моделей є невизначеність, тому що точно спрогнозувати структуру зв'язків між вершинами передфрактального графа на черговому етапі породження неможливо. Але можна виявити характеристики, які залишаються незмінними на всій траєкторії фрактального графа або змінюються за певними правилами.

Для порівняльного аналізу структур у роботі [1] використовуються інформаційні оцінки рівня цілісності й коефіцієнта використання компонентів системи, які інтерпретуються як оцінки міри централізації та децентралізації

управління в системі. Ці оцінки отримано зі співвідношення, що визначає взаємозв'язок системної C_c , власної C_o й взаємної C_b складності системи:

$$C_c = C_o + C_b. \quad (1)$$

З формули (1) одержують дві сполучені оцінки як міри централізації:

$$\begin{aligned} \alpha &= -C_b / C_o, \\ \beta &= C_c / C_o, \beta = 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Оцінка (2) для організаційних систем інтерпретується як характеристика стійкості, керованості, міри централізації управління. Оцінка (3) показує самостійність, автономність частин у цілому, рівень використання можливостей елементів.

Збільшення β трактується як децентралізація управління, а α – як рівень централізації управління. Тоді при прагненні до децентралізації управління, до більш ефективного використання можливостей співробітників або структурних підрозділів слід обирати структуру з більшим значенням β . При прагненні зберегти цілісність та посилити централізоване управління варто віддати перевагу структурам з більшим значенням α . Обраний варіант структури буде сприяти або, навпаки, перешкоджати впровадженню прийнятих принципів управління. Результати досліджень, що наведені в роботі [1], для структур з різною кількістю рівнів ієрархії показали, що зі збільшенням кількості рівнів міра цілісності істотно зростає. У дворівневих структурах величина α наближено дорівнює значенню 0,5, а в структурах із кількістю рівнів 5–6 і більше α наближається до 0,9, тобто суттєво зростає зв'язане, те, що залишається всередині системи (C_b).

Іншим підходом до порівняльного аналізу структур є обчислення комбінаторних характеристик відповідних графів, наприклад:

– ієрархічність – властивість структури, що виявляється у зв'язках між елементами. Ця характеристика дає змогу розподілити елементи структури в порядку їхньої значущості;

– діаметр графа – метрична характеристика, уведена для визначення найкоротшої відстані між найбільш віддаленими вершинами;

– пропускну здатність структури визначається максимальним потоком повідомлень, який можна організувати між її елементами;

– цикломатичне число визначає кількість лінійно незалежних контурів у сильнозв'язному графі.

Реальна система, як правило, перебуває між двома крайніми станами – централізованою та децентралізованою, що показано на рис. 1.

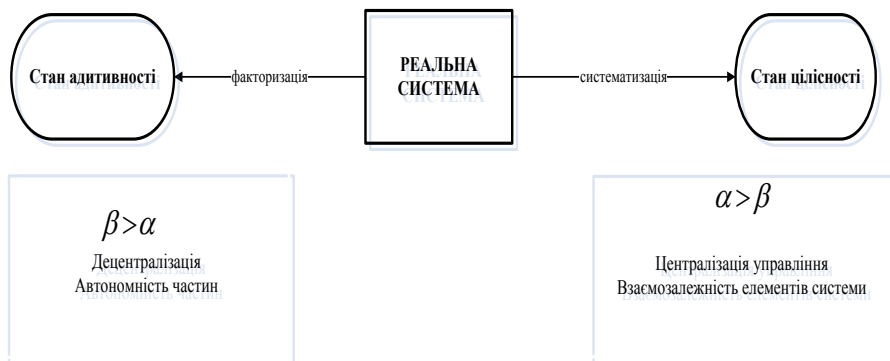


Рис. 1. Рух реальної системи між крайніми станами адитивності та цілісності її структури

Досяжність, доступність до надбань людства, що збільшується за допомогою нових інформаційних технологій, розширює множину напрямів структурних змін, які відбуваються в реальних соціально-економічних системах, ускладнює їх динаміку. Основні напрями структурних змін соціально-економічних систем у

сучасній економіці зображено на рис. 2. Основними процесами, що змінюють складність структури, є процеси організації і самоорганізації та їх взаємодія. При цьому зміни структури відбуваються в просторі структурних змін, основними вісями якого є вісь інтеграції та вісь централізації.

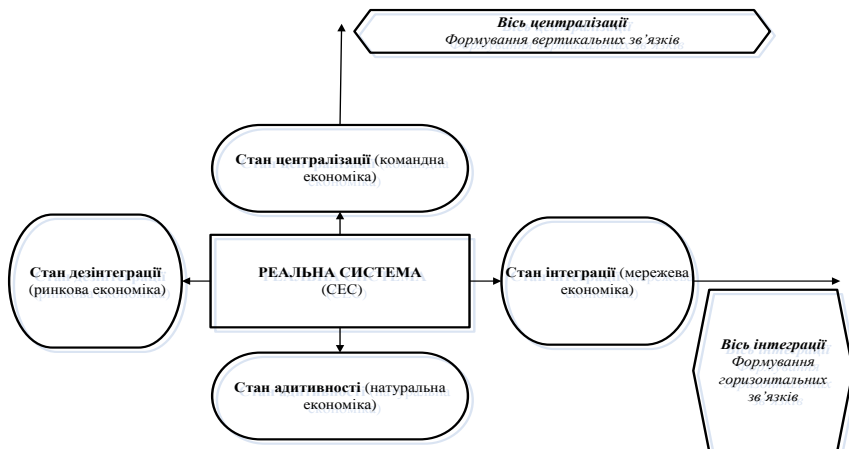


Рис. 2. Осі можливих структурних змін соціально-економічних систем (СЕС)

Методологічно в синергетиці приймається, що атрактор – аналог мети системи, закінчення процесу. При наближенні процесу до атрактивної мети процеси стабілізуються, система входить до режиму сталого розвитку або динамічної рівноваги. До форм соціально-економічних атрактивних структур відносяться: спрямований натовп; ігрова соціальна структура; кластери, мережі, гетерархія [2].

Гетерархія означає, що всі агенти соціально-економічного простору знаходяться на одному рівні як рівноправні учасники однієї групи зі спільними цілями (наприклад, державна безпека, достаток у суспільстві, добробут громадян). Така група організована горизонтально і всі її учасники (вершини орграфу) мають однаковий авторитет та однакову колективну соціальну відповідальність.

Для порівняння мір централізації структур ієрархії та гетерархії використовувались інформаційний та комбінаторний підходи.

Література

1. Волкова В. Н. Основы теории систем и системного анализа / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. — СПб. : Издательство СПбГТУ, 1999. — 512 с.

2. Старк Д. Гетерархия: неоднозначность активов и организация разнообразия в постсоциалистических странах / Д. Старк // Экономическая социология. — 2001. — Т. 2. — № 2. — С. 115—132.

ОБОБЩЕННЫЙ ГРАФ КРОНРОДА-РИБА

Бондарь О.П., bondarkla@ukr.net

Кировоградская летняя академия НАУ

Аннотация. Дано определение графа Кронрода-Риба интегральных траекторий функции с изолированными критическими точками на замкнутой поверхности, указана его связь с определением графа Кронрода-Риба этой функции, приведены примеры сравнения графов гомотопных функций на торе.

Abstract. In this paper is given definition of Kronrod-Reeb graph of integral trajectories of function with isolated critical points on closed surface, indicated its relation with the definition of Kronrod-Reeb graph of the function, considered compared examples of these graphs of homotopy functions on torus.

В.В.Шарко [1] и А.О.Пришляк [2] разными способами получили с точностью до топологической эквивалентности классификацию гладких функций с изолированными критическими точками на замкнутых поверхностях. В.В.Шарко использовал для этого, в частности, графы Кронрода-Риба [3].

Обозначим через $C^\infty(M, \partial M)$ пространство гладких функций на поверхности M с краем ∂M , у которых все критические точки изолированные и лежат во внутренности M . Предположим, что на компонентах связности края ∂M функции из пространства

$C^\infty(M, \partial M)$ принимают постоянные значения. Для регулярного значения a функции f из $C^\infty(M, \partial M)$ компонента связности линии уровня $f^{-1}(a)$, которую называют слоем, будет гладко вложенная в поверхность M окружность. Для не регулярного значения a слоем будет некоторое замкнутое подмножество M .

Фактор-множество на множестве слоев функции f по отношению эквивалентности принадлежности точки поверхности M слою называется графом Кронрода-Риба $\Gamma_{\text{К-Р}}(f)$ для функции f из пространства $C^\infty(M, \partial M)$.

Другими словами [4], графом Кронрода-Риба гладкой функции с изолированными критическими точками на замкнутой поверхности называется граф, образованный стягиванием каждой компоненты связности линий уровня в точку, с заданным порядком на вершинах, соответствующим порядку возрастания значений функции в соответствующих точках.

При этом рассматриваются только функции общего положения, т.е. функции, все критические точки которых лежат на разных линиях уровня.

Графы Кронрода-Риба идентифицируют топологически эквивалентные функции Морса, а именно, две функции Морса (гладкие функции, все критические точки которых невырождены) на замкнутой ориентированной поверхности топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Кронрода-Риба изоморфны [5].

Но эти графы не позволяют идентифицировать перестройки функций с изолированными критическими точками, а также функций, все критические точки которых лежат на одной линии уровня. Поэтому для исследования функций с изолированными критическими точками имеет смысл ввести более тонкое понятие – граф Кронрода-Риба интегральных траекторий.

Определение. *Графом Кронрода-Риба интегральных траекторий* функции с изолированными критическими точками на замкнутой поверхности назовем граф, образованный стягиванием в точку каждого ее связного подмножества точек интегральных траекторий, идущих в одну критическую точку, на каждой компоненте связности линий уровня, с заданным порядком на

вершинах, соответствующим порядку возрастания значений функции в соответствующих точках.

Таким образом, граф Кронрода-Риба – фактор-множество на графе Кронрода-Риба интегральных траекторий по отношению эквивалентности принадлежности точки слоя связному подмножеству точек интегральных траекторий, идущих в одну критическую точку.

Сравним графы Кронрода-Риба и Кронрода-Риба интегральных траекторий функций

$$f_t = z + t(x - z),$$

заданных на двумерном торе

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2(r^2 - x^2), \quad R > r.$$

Каждая из функций f_t при $0 < t < 1/2$ имеет на торе 4 критические точки: минимум, максимум и две классические седловые точки. $\Gamma_{K-R}(f_t)$ представляет собой множество вершин и ребер: ребро, направленное от вершины 1, соответствующей минимуму, к вершине 2, соответствующей нижнему седлу, от которой два ребра направлены к вершине 3, соответствующей верхнему седлу, и от вершины 3 ребро направлено к вершине 4, соответствующей максимуму.

Граф Кронрода-Риба интегральных траекторий для этой же функции: из вершины 1 два ребра направлены к вершине 2, а два другие – к вершине 4, из вершины 2 два ребра направлены к вершине 3, от которой два ребра направлены к вершине 4.

Произведя действия с отдельными элементами этого графа, можно проиллюстрировать перестройку функции f_t в функцию с тремя критическими точками – минимумом, максимумом и так называемым «обезьяньим седлом». Граф Кронрода-Риба интегральных траекторий при этом будет таким: из вершины 1 три ребра направлены к вершине 2, из которой три ребра направлены к вершине 3. Заметим, что $\Gamma_{K-R}(f)$ при этом не определен.

Функция f_t при $t=1/2$ имеет на торе 4 критические точки: минимум, максимум и две седловые точки, расположенные на

одной линии уровня. Поскольку функция не общего положения, то $\Gamma_{K-R}(f)$ также не определен.

Зато определен граф Кронрода-Риба интегральных траекторий для этой функции: из вершины 1 по два ребра направлены к вершинам 2 и 3, из каждой из которых по два ребра – к вершине 4.

Функции f_t при $1/2 < t < 1$ имеют на торе 4 критические точки: минимум, максимум и две седловые точки. $\Gamma_{K-R}(f_t)$ представляет собой множество вершин и ребер: ребро, направленное от вершины 1, соответствующей минимуму, к вершине 3, от которой два ребра направлены к вершине 2, и от вершины 2 ребро направлено к вершине 4, соответствующей максимуму. Заметим, что графы $\Gamma_{K-R}(f_t)$ при $0 < t < 1/2$ и $1/2 < t < 1$ не изоморфны, так как поменялась нумерация вершин. Это значит, что соответствующие функции Морса не топологически эквивалентны.

Граф Кронрода-Риба интегральных траекторий для этой функции: из вершины 1 два ребра направлены к вершине 3, а два другие – к вершине 2, из вершины 2 два ребра направлены к вершине 4, к которой два ребра направлены от вершины 3.

Некоторые действия (не рассматриваемые здесь) с элементами этого графа позволяют проиллюстрировать перестройку функции f_t в функцию Морса-Ботта f_1 с двумя критическими окружностями.

Литература

1. Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях. Український математичний журнал. – 2003. – Т.55, -№5, -С.687-700.

2. Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. Topology and its application. -2002. –Vol. 119, - №3.

3. Кронрод А.С. О функциях двух переменных// Успехи мат. Наук. – 1950. 5, №1. –С.24-134.

4. Личак Д.П. Глобальна класифікація функцій з простими особливостями на поверхнях// Вісник Київського університету. - 2009. -2. – С.4-7.

5. Kulinich E.V. On topologically equivalent Morse functions on surfaces. Methods of Functional Analysis and Topology. -1998. –V.4. – №1. –P.59-64.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МНОЖЕСТВЕННОГО НАСЛЕДОВАНИЯ: РЕФЛЕКСИВНО- ТРАНЗИТИВНОЕ ЗАМЫКАНИЕ

Буй Д.Б., Шишацька О.В., Fabunmi S., Mohammed K.

buy@unicyb.kiev.ua, oshyshatska@gmail.com,

sunmadefabunmi@yahoo.com, karamjasim1978@yahoo.com,

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Робота присвячена математичним основам алгоритмів лінеаризації – одного з методів розв'язання конфлікту імен, що виникає при множинному успадкуванні в об'єктно-орієнтованих мовах програмування. Основний об'єкт дослідження – рефлексивно-транзитивне замикання бінарного відношення. Встановлені основні властивості такого замикання: критерій бути частковим порядком, замикання є оператором замикання, наведені неявні представлення замикання через його властивості та як найменшого розв'язку певного рівняння (при цьому встановлена структура множини всіх розв'язків такого рівняння).

The paper is devoted to the mathematical foundations of the linearization algorithms – the method of names conflict resolution that occurs in object-oriented programming languages which support multiple inheritance. The main object of study is the reflexive-transitive closure of a binary relation. The basic properties of this closure are found: the criterion to be partial order, closure is the closure operator, denotation representations of closure in terms of its properties and as the least solution of some equation (the structure of the set of all solutions of this equation is established).

В объектно-ориентированных языках программирования, поддерживающих множественное наследование, возможен конфликт имен. Такая ситуация возникает, когда один и тот же метод (либо поле) с различной семантикой присутствуют в нескольких родительских классах данного класса.

Существует два основных подхода к разрешению конфликта имен [1]. В первом случае конфликт разрешается тривиально путем явного указания одного родительского класса из нескольких

возможных; такой подход реализован, например, в языке C++. Во втором случае применяется специальный алгоритм для выбора нужного родительского класса; такой подход реализован, например, в языках CLOS, LOOPS, Python, Perl, Dylan [2-5]. Основное преимущество второго подхода заключается в том, что конфликт имен разрешается динамически при выполнении программы.

Основная идея второго подхода заключается в линеаризации всех предков класса, т.е. в линейном их упорядочении с последующим выбором первого требуемого предка. По существу речь идет об алгоритмах обхода ациклического графа, построенного по иерархии классов (подробности см., например, в [6]).

Несмотря на то, что алгоритмы линеаризации были предложены еще в начале 90-х годов прошлого столетия, они по сути не имеют строгого математического обоснования. Настоящая работа как раз и посвящена математическим основам линеаризации, в работе представлен фрагмент математической теории бинарных отношений, касающийся в основном рефлексивно-транзитивных замыканий, так как именно такие замыкания и применяются при построении по иерархии классов соответствующего частичного порядка на классах.

Теория бинарных отношений занимает важное место, мы упомянем только не очень известные фундаментальные классические работы [7, 8], не потерявшие и сейчас свою актуальность.

В предлагаемой статье получены такие основные результаты: установлены свойства инверсии бинарного отношения, произведения бинарных отношений, рефлексивно-транзитивного замыкания бинарного отношения. Для указанного замыкания: (1) установлен критерий быть частичным порядком, (2) замыкание является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения, (3) замыкание U^* является наименьшим решением параметрического уравнения $X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X$, где Δ_D – диагональ на универсуме, а \circ –

произведение бинарных отношений, (4) установлена структура множества всех решений указанного уравнения.

Все стандартные понятия для бинарных отношений понимаются в смысле [9], для замкнутости изложения приведены основные определения.

Зафиксируем универсум D , элементы которого обозначим x, y, z, \dots ; бинарные отношения на D обозначим U, V, \dots . Всюду далее символ ■ обозначает конец формулировки утверждения и доказательства, а символ □ – конец логической части доказательства.

В следующем предложении приведены нужные далее свойства инверсии бинарного отношения, которое вводится стандартно: $U^{-1} = \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in U\}$. Ниже $U \circ V = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z (\langle x, z \rangle \in U) \wedge (\langle z, y \rangle \in V)\}$ – обычное произведение отношений U и V (в указанном порядке).

Предложение 1 (свойства инверсии). Имеет место:

1. $U \subseteq V \Rightarrow U^{-1} \subseteq V^{-1}$ (монотонность относительно теоретико-множественного включения);
2. $\Delta_D^{-1} = \Delta_D$, где $\Delta_D = \{\langle x, x \rangle \mid x \in D\}$ – диагональ на D ;
3. $\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)^{-1} = \bigcup_{i \in I} U_i^{-1}$ (дистрибутивность относительно объединений);
4. $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$ (инверсия произведения отношений);
5. $(U^{-1})^{-1} = U$ (инверсия инверсии). ■

Доказательство проводится непосредственно. ■

В следующем предложении приведены необходимые далее свойства произведения отношений.

Предложение 2 (свойства произведения). Имеет место:

1. $U \subseteq V \wedge U' \subseteq V' \Rightarrow U \circ U' \subseteq V \circ V'$ (монотонность относительно теоретико-множественного включения по каждому аргументу);
2. $\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \circ \left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} U_i \circ V_j$ (дистрибутивность относительно объединений по каждому аргументу);

$$3. \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) \circ \left(\bigcap_{j \in J} V_j \right) \subseteq \bigcap_{i \in I, j \in J} U_i \circ V_j \quad (\text{верхняя оценка произведения}$$

пересечений);

4. $U \circ \Delta_D = \Delta_D \circ U = U$ (диагональ Δ_D – правая (левая) единица по произведению). ■

Доказательство проводится непосредственно. ■

Рефлексивность бинарного отношения понимается стандартно:

$$U \text{ – рефлексивно} \Leftrightarrow \forall x (\langle x, x \rangle \in U).$$

Очевидно, что $U \text{ – рефлексивно} \Leftrightarrow \Delta_D \subseteq U \Leftrightarrow \Delta_D \subseteq U^{-1}$.

Первая эквивалентность очевидна, а вторая вытекает из монотонности инверсии (п. 1 предложения 1), а также пп. 2, 5 предложения 1.

Ниже понятие антисимметричности отношения понимается стандартно:

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow \forall xy (\langle x, y \rangle \in U \wedge \langle y, x \rangle \in U \Rightarrow x = y).$$

Ниже приведен критерий антисимметричности без использования предметных переменных.

Предложение 3 (критерий антисимметричности). Имеет место:

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D. \quad \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle x, y \rangle \in U \cap U^{-1}$, тогда $\langle x, y \rangle \in U$ и $\langle x, y \rangle \in U^{-1}$. Таким образом, $\langle x, y \rangle \in U$ и $\langle y, x \rangle \in U$, т.е., ввиду антисимметричности U , $x = y$, следовательно, $\langle x, y \rangle \in \Delta_D$. □

Достаточность. Пусть $\langle x, y \rangle \in U$ и $\langle y, x \rangle \in U$, т.е. $\langle x, y \rangle \in U$, а $\langle x, y \rangle \in U^{-1}$. Отсюда $\langle x, y \rangle \in U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D$. □■

Включение из правой части эквивалентности предложения 3 переходит в равенство для рефлексивных отношений.

Следствие 1 (критерий антисимметричности и рефлексивности). Имеет место:

$$U \text{ – антисимметрично и рефлексивно} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D. \quad \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U – антисимметрично и рефлексивно. По предложению 3 $U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D$ и остается показать обратное включение. Ввиду рефлексивности U

выполняются включения $\Delta_D \subseteq U$, $\Delta_D \subseteq U^{-1}$, из которых и вытекает требуемое включение $\Delta_D \subseteq U \cap U^{-1}$. \square

Достаточность. Пусть $U \cap U^{-1} = \Delta_D$. Ввиду предложения 3 U антисимметрично. Кроме того, очевидно, что $\Delta_D \subseteq U(\Delta_D \subseteq U^{-1})$, т.е. U и рефлексивно. \square

Переходим к транзитивности отношений, которое понимается стандартно:

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow \forall x y z (\langle x, y \rangle \in U \wedge \langle y, z \rangle \in U \Rightarrow \langle x, z \rangle \in U).$$

Ниже приведен критерий транзитивности без использования предметных переменных. Далее $U^2 = U \circ U$.

Предложение 4 (критерий транзитивности). Имеет место

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow U^2 \subseteq U. \blacksquare$$

Доказательство проводится непосредственно. \blacksquare

Отметим, простые примеры показывают, что заменить в правой части эквивалентности предложения 4 включение на равенство, вообще говоря, нельзя.

Действительно, пусть $U = \{\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle, \langle x, z \rangle\}$, где x, y, z попарно различны (см. рис.1).

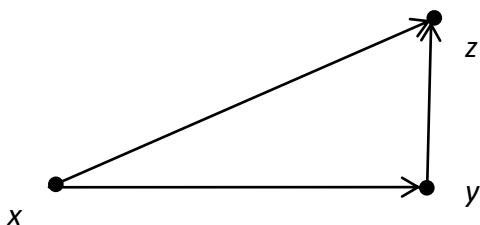


Рис. 1. Пример транзитивного отношения, такого, что $U \subsetneq U^2$

Очевидно, что $U^2 = \{\langle x, z \rangle\}$, т.е. U – транзитивно; при этом $U \subsetneq U^2$, таким образом, равенство $U = U^2$ не выполняется.

Включение из правой части эквивалентности предложения 4 переходит в равенство для рефлексивных отношений.

Следствие 2 (критерий транзитивности и рефлексивности).
Имеет место:

$$U - \text{транзитивно и рефлексивно} \Leftrightarrow U^2 = U \wedge \Delta_D \subseteq U. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U – транзитивно и рефлексивно. По определению рефлексивности $\Delta_D \subseteq U$. Ввиду предложения 4 $U^2 \subseteq U$ и остается установить обратное включение. Действительно, $U \subseteq U$ и $\Delta_D \subseteq U$, откуда в силу монотонности произведения (п. 2 предложения 2) и п. 4 предложения 2 (Δ_D – единица по произведению) получаем включение $U \circ \Delta_D = U \subseteq U^2$.
□■

Достаточность вытекает из определения рефлексивности и предложения 4 (критерий транзитивности). □■

Ниже приведен критерий частичного порядка без использования предметных переменных.

Предложение 5 (критерий частичного порядка). Имеет место:

$$U - \text{частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D \wedge \Delta_D \subseteq U \wedge U^2 \subseteq U. \blacksquare$$

Доказательство вытекает из определения рефлексивности и критериев антисимметричности (предложение 3) и транзитивности (предложение 4). ■

Упростим правую часть эквивалентности предложения 5, учитывая рефлексивность частичного порядка.

Следствие 3 (критерий частичного порядка). Имеет место:

$$U - \text{частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D \wedge U^2 = U. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость вытекает из критериев антисимметричности и рефлексивности (следствие 1), а также транзитивности и рефлексивности (следствие 2). □

Достаточность также вытекает из этих же критериев. □■

Переходим к основному понятию работы – рефлексивно-транзитивному замыканию отношения U , которое вводится стандартно:

$$U^* = \bigcup_{i=0,1,2,\dots} U^i, \text{ где } U^0 = \Delta_D, U^1 = U, U^{i+1} = U \circ U^i, i=1,2,\dots$$

Предложение 6 (свойства рефлексивности и транзитивности рефлексивно-транзитивного замыкания). U^* – рефлексивно и транзитивно. ■

Доказательство. Рефлексивность очевидна, проверим транзитивность U^* . Для этого ввиду предложения 4 (критерий транзитивности) достаточно проверить включение $U^* \circ U^* \subseteq U^*$ (из-за рефлексивности U^* на самом деле будет установлено равенство). Имеем цепочку равенств:

$$(U^*)^2 = \left(\bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \right) \circ \left(\bigcup_{j=0,1,\dots} U^j \right) = \bigcup_{i=0,1,\dots; j=0,1,\dots} U^{i+j} = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup \bigcup_{i=0,1,\dots; j=1,2,\dots} U^{i+j} = U^*.$$

Здесь воспользовались дистрибутивностью произведения относительно объединений (п. 2 предложения 2) и очевидным включением $\bigcup_{i=0,1,\dots; j=1,2,\dots} U^{i+j} \subseteq U^*$. ■

Таким образом, чтобы быть частичным порядком рефлексивно-транзитивное замыкание должно обладать антисимметричностью. Соответствующий критерий без использования предметный переменных приведен в следующем предложении.

Предложение 7 (критерий антисимметричности для U^*). Имеет место:

$$U^* \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow \forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D. \quad \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U^* – антисимметрично, тогда по критерию антисимметричности (предложение 3) $U^* \cap (U^*)^{-1} \subseteq \Delta_D$. Распишем левую часть этого включения:

$$U^* \cap (U^*)^{-1} = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cap \left(\bigcup_{j=0,1,\dots} U^j \right)^{-1} = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cap \bigcup_{j=0,1,\dots} (U^{-1})^j = \bigcup_{i=0,1,\dots; j=0,1,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j.$$

В этих переходах воспользовались дистрибутивностью инверсии относительно объединений и инверсией произведения (пп. 3 и 4 предложения 1). Итак, имеем:

$$\bigcup_{i=0,1,\dots; j=0,1,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j = U^* \cap (U^*)^{-1} \subseteq \Delta_D. \text{ Отсюда и вытекает,}$$

что $U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D$ для всех $i, j = 1, 2, \dots$. □

Достаточность. Ввиду критерия антисимметричности (предложение 3) достаточно установить включение $U^* \cap (U^*)^{-1} \subseteq \Delta_D$.

Используем представление левой части этого включения, приведенное выше при доказательстве необходимости. Имеем:

$$\begin{aligned} U^* \cap (U^*)^{-1} &= \bigcup_{i=0,1,\dots;j=0,1,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j = \\ &= \bigcup_{i=1,2,\dots;j=1,2,\dots} U^i \cap (U^{-1})^j \cup \bigcup_{j=0,1,\dots;i=0} \Delta_D \cap (U^{-1})^j \cup \bigcup_{i=0,1,\dots;j=0} U^i \cap \Delta_D \subseteq \Delta_D \cup \Delta_D \cup \Delta_D = \Delta_D. \end{aligned}$$

□■

Теперь можно сформулировать один из основных результатов.

Следствие 4 (критерий частичного порядка для U^*). Имеет место:

$$U^* \text{ — частичный порядок} \Leftrightarrow \forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D. \quad \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость вытекает из критерия антисимметричности для U^* (предложение 7), а достаточность — из того же критерия и предложения 6. ■

Именно этот результат важен для алгоритмов линеаризации, когда по иерархии классов, удовлетворяющих по сути условию отсутствия циклов в соответствующем графе, строится частичный порядок на классах (требование $\forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D$ и говорит по существу о отсутствии циклов).

Переходим к свойствам рефлексивно-транзитивного замыкания, важным для внутренней проблематики теории бинарных отношений.

Рассмотрим следующее семейство отношений для зафиксированного отношения U :

$$F_U = \{V \mid V \text{ — рефлексивно и транзитивно } \wedge U \subseteq V\}.$$

Это семейство непусто и содержит, например, U^* (ввиду предложения 6) и универсальное отношение $D \times D$.

Предложение 8 (свойство замкнутости F_U). Семейство F_U замкнуто относительно произвольных пересечений). ■

Доказательство. Пусть $\hat{V} = \bigcap_{i \in I} V_i$, где $V_i \in F_U$ для всех $i \in I$.

Покажем, что $\hat{V} \in F_U$.

Рефлексивность \hat{V} и включение $U \subseteq \hat{V}$ очевидны. \square

Покажем транзитивность \hat{V} . Ввиду критерия транзитивности (предложение 4) для этого достаточно проверить включение $\hat{V} \circ \hat{V} \subseteq \hat{V}$. Действительно, имеем:

$$\hat{V} \circ \hat{V} = \left(\bigcap_{i \in I} V_i \right) \circ \left(\bigcap_{j \in J} V_j \right) \subseteq \bigcap_{i \in I, j \in J} V_i \circ V_j \subseteq \bigcap_{i \in I} V_i \circ V_i = \bigcap_{i \in I} V_i = \hat{V}.$$

В этих переходах использовали верхнюю оценку произведения пересечений (п.3 предложения 2) и равенство $V_i^2 = V_i$ (V_i – рефлексивно и транзитивно, далее по следствию 2). $\square \blacksquare$

Из предложения 8 вытекает, что семейство F_U является муровским по терминологии [10] и центрированным по терминологии [11].

Следствие 5. $U^* = \bigcap_{V \in F_U} V$. \blacksquare

Доказательство. Обозначим $V_0 = \bigcap_{V \in F_U} V$. Так как $U^* \in F_U$, то $V_0 \subseteq U^*$ и остается показать обратное включение. \square

Зафиксируем произвольное $V \in F_U$ и индукцией по $k = 0, 1, \dots$ проверим включение $U^k \subseteq V$.

Базис индукции. $U^0 = \Delta_D \subseteq V$ ввиду рефлексивности V . \square

Индуктивный шаг. Пусть $U^k \subseteq V$, домножим обе части включения на U ; тогда, ввиду монотонности произведения (п.1 предложения 2), включение сохранится: $U^k \circ U = U^{k+1} \subseteq U \circ V$. Остается учесть включение $U \circ V \subseteq V \circ V = V$ (использована та же монотонность произведения, включение $U \subseteq V$, свойства рефлексивности и транзитивности V и соответствующий критерий – следствие 2). \square

Итак, $U^k \subseteq V$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. $U^* \subseteq V$. Отсюда ввиду произвольности $V \in F_U$ и вытекает требуемое включение $U^* \subseteq \bigcap_{V \in F_U} V = V_0$. $\square \blacksquare$

Таим образом, замыкание U^* – наименьшее (относительно теоретико-множественного включения) рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее отношение U . Отсюда вытекает следующее следствие.

Следствие 6 (описание неподвижных точек оператора $U \mapsto U^*$). Имеет место:

$$U \text{ – рефлексивно и транзитивно} \Leftrightarrow U^* = U. \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 5, а достаточность – из предложения 6. \blacksquare

Предложение 9 (свойства оператора $U \mapsto U^*$). Имеет место:

1. $U \subseteq V \Rightarrow U^* \subseteq V^*$ (монотонность относительно теоретико-множественного включения);
2. $U \subseteq U^*$ (возрастаемость относительно теоретико-множественного включения);
3. $(U^*)^* = U^*$ (идемпотентность). \blacksquare

Доказательство. П.1 вытекает из монотонности произведения (п.1 предложения 2). \square

П.2 очевиден. \square

Для проверки п.3 надо применить предложение 6 (U^* – рефлексивно и транзитивно) и следствие 6 (о неподвижных точках оператора $U \mapsto U^*$). $\square \blacksquare$

Ниже понятие оператора замыкания используется в смысле [12].

Следствие 7. Оператор $U \mapsto U^*$ является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения. \blacksquare

Доказательство вытекает из предложения 9. \blacksquare

Дадим иную характеристику рефлексивно-транзитивного замыкания – как наименьшего решения соответствующего естественного уравнения.

Зафиксируем отношение U и рассмотрим параметрическое уравнение относительно $X \in 2^{D \times D}$:

$$X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X.$$

Предложение 10. (U^* как наименьшее решение уравнения). U^* является наименьшим (по теоретико-множественному включению) решением уравнения (1). ■

Доказательство. Покажем сначала, что U^* является решением уравнения (1). Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_D \cup U^* \cup U \circ U^* &= \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup U \circ \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i = \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^{i+1} = \\ &= \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup \bigcup_{i=1,2,\dots} U^i = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i = U^*. \end{aligned}$$

□

Пусть теперь V – произвольное решение уравнения (1). Очевидно, что тогда выполняются включения

$$\Delta_D \subseteq V, \quad U \circ V \subseteq V.$$

Индукцией по $k = 0, 1, 2, \dots$ покажем, что $U^k \subseteq V$.

Базис. $U^0 = \Delta_D$, остается применить первое включение из (2). □

Индуктивный шаг. Пусть $U^k \subseteq V$, домножим обе части включения на U слева. В силу монотонности произведения включение сохранится: $U \circ U^k = U^{k+1} \subseteq U \circ V \subseteq V$ (использовали второе включение из (2)). □

Итак, $U^k \subseteq V$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. $U^* = \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \subseteq V$. □■

Далее установим структуру множества всех решений уравнения (1), для чего понадобится лемма, обобщающая второе включение из (2).

Лемма 1. Если V – решение уравнения (1), то

$$U^k \circ V' \subseteq V$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ и $V' \subseteq V$. ■

Доказательство проведем индукцией по $k = 0, 1, 2, \dots$

Базис проводится очевидным образом с использованием того, что Δ_D – единица по произведению (п.4 предложение 2). □

Индуктивный шаг проводится аналогично доказательству предложения 10 с использованием второго включения из (2). \square

Предложение 11 (структура множества всех решений уравнения (1)). Отношение вида $U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V$ для любого

отношения V является решением уравнения (1). Любое решение имеет указанный вид (для подходящего V). \blacksquare

Доказательство. Пусть V – произвольное отношение, покажем, что отношение, указанное в предложении 11, является решением уравнения (1). Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_D \cup \left(U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \right) \cup U \circ \left(U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \right) &= \Delta_D \cup U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^{k+1} \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^{k+1} \circ V = \\ &= \Delta_D \cup U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ V = U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V. \end{aligned}$$

В переходах воспользовались дистрибутивностью произведения относительно объединений (п.2 предложение 2). \square

Пусть \hat{V} – произвольное решение уравнения (1), покажем, что оно имеет вид, указанный в предложении 11; т.е. найдем отношение V , такое, что $\hat{V} = U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V$. Положим $V = \hat{V} \setminus U^*$

и установим требуемое равенство. Имеем цепочку равенств (учтем, что U^* наименьшее решение уравнения (1)):

$$U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*) = U^* \cup \hat{V} \setminus U^* \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*) = \hat{V} \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*)$$

Таким образом, выполняются два включения $\hat{V} \subseteq \hat{V} \cup \bigcup_{k=1,2,\dots} U^k \circ (\hat{V} \setminus U^*) \subseteq \hat{V}$ (последнее включение вытекает из (3)

в лемме 1), из которых и вытекает требуемое представление решения \hat{V} . \square

В заключение переходим к краткой формулировке основных результатов и их интерпретации. В работе на основе свойств инверсии и произведения бинарных отношений установлены следующие свойства рефлексивно-транзитивного отношения:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения U является частичным порядком тогда и только тогда, когда $\forall i, j = 1, 2, \dots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D$;

2) оператор построения по отношению его рефлексивно-транзитивного замыкания является монотонным, возрастающим (относительно теоретико-множественного включения) и идемпотентным;

3) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является наименьшим (по теоретико-множественному включению) рефлексивным и транзитивным отношением, содержащим исходное отношение;

4) рефлексивно-транзитивное замыкание U^* является наименьшим (по теоретико-множественному включению) решением параметрического уравнения $X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X$;

5) все решения уравнения из предыдущего пункта имеют вид $U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\dots} U^k \circ V$ для подходящих отношений V ; любое отношение

такого вида является решением указанного уравнения.

Из указанных результатов следуют выводы:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является частичным порядком тогда и только тогда, когда граф этого отношения является ациклическим;

2) оператор построения по отношению его рефлексивно-транзитивного замыкания является оператором замыкания (относительно теоретико-множественного включения);

3) наряду с явным заданием рефлексивно-транзитивного замыкания имеются и два неявных (денотативных): во-первых, как наименьшего рефлексивного и транзитивного отношения, содержащего исходное отношение; во-вторых, как наименьшего решения уравнения (т.е. как наименьшей неподвижной точки оператора, соответствующего правой части этого уравнения).

Литература

1. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Proposal for a Monotonic Multiple Inheritance Linearization // OOPSLA '94

Proceedings of the ninth annual conference on Object-oriented programming systems, language, and applications. – 1994. – P. 164-175.

2. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Monotonic conflict resolution mechanisms for inheritance” // Proceeding OOPSLA '92 conference proceedings on Object-oriented programming systems, languages, and applications. – 1992. – P.16-24.

3. Michele Simionato. The Python 2.3 Method Resolution Order. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.python.org/download/releases/2.3/mro/>.

4. Guido van Rossum. Method Resolution Order – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://python-history.blogspot.com/2010/06/method-resolution-order.html>.

5. Par Gaël Pegliasco. Python Tutorial: Understanding Python MRO – Class search path. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://makina-corpus.com/blog/metier/2014/python-tutorial-understanding-python-mro-class-search-path>.

6. D. Buy, J. Karam, S. Kompan, S. Polyakov. Linearization algorithms CLOS and LOOPS of the classes in programming languages: the formal definitions // 13th International Scientific Conference on Informatics. – Poprad, Slovakia, 18-20 Nov., 2015. – P. 63-66 (Print ISBN: 978-1-4673-9867-1, DOI [10.1109/Informatics.2015.7377809](https://doi.org/10.1109/Informatics.2015.7377809)).

7. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник: Сборник переводов. – Москва: Иностранная литература, 1963. – Вып. 7. – С. 129-185.

8. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения (Сборник статей). – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1965. – Вып. 1. – С. 3-178.

9. Общая алгебра. Т. 1 / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др. Под общей редакцией Л.А. Скорнякова. – Москва: Наука, 1990. – 592 с.

10. Биркгоф Г. Теория решеток. – Москва: Наука, 1984. – 568 с.

11. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – Москва: Мир, 1970. – 416 с.

12. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 159 с.

О ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ОТ СУПЕРЭКСПОНЕНТЫ

Воблый В.А., Кононенко Д.А.,
vitvobl@yandex.ru, dimon-kon@rambler.ru,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация. Получена рекуррентная формула для производных высшего порядка от суперэкспоненты.

Функции с суперэкспоненциальным ростом используются в информатике и физике.

Суперэкспонентой будем называть функцию $y = \exp(\exp(x))$, где $y = \exp(x)$ – обычная экспоненциальная функция. Классическая формула Фаа ди Бруно дает производную n -го порядка от сложной функции.

Пусть

$$A(t) = f(g(t)), A_n = \frac{d^n A(t)}{dt^n}, g_n = \frac{d^n g(t)}{dt^n}, f_n = \left[\frac{d^n f(u)}{du^n} \right]_{u=g(t)}.$$

Тогда по формуле Фаа ди Бруно [1, с. 58] имеем

$$A_n = \sum \frac{n! f_k}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{g_n}{n!} \right)^{k_n},$$

где $k = k_1 + \dots + k_n$ и суммирование производится по всем разбиениям числа n , то есть по всем решениям в неотрицательных целых числах уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$.

Для суперэкспоненты
 $f(t) = g(t) = \exp(t), g_n = \exp(t), f_n = \exp(\exp(t))$ и, следовательно,

$$y^{(n)} = A_n = \exp(\exp(x)) \sum \frac{n! \exp(kt)}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{1}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \right)^{k_n}.$$

Получена рекуррентная формула для производных высшего порядка от суперэкспоненты, не содержащая суммирования по всем разбиениям целого числа.

Теорема. Пусть $y = \exp(\exp(x))$ – суперэкспонента, тогда при $n \geq 0$

$$y^{(n)} = \exp(\exp(x)) P_n(\exp(x)) \quad , \text{ где } P_n(t) \text{ – многочлен степени } n \text{ ,}$$

$$P_0(t) = 1 \text{ ,}$$

$$P_{n+1}(t) = t(P_n(t) + (P_n(t))') \text{ .} \quad (1)$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n=1$ имеем $y' = \exp(\exp(x)) \cdot \exp(x)$, то есть $P_1(t) = t$ и формула (1) верна.

Пусть теперь теорема верна для $n = k$, докажем, что она верна для $n = k + 1$.

Действительно,

$$y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = (\exp(\exp(x)) P_k(\exp(x)))' = \exp(\exp(x)) \cdot \exp(x) \cdot P_k(\exp(x)) +$$

$$\exp(\exp(x)) \cdot P'_k(\exp(x)) = \exp(\exp(x)) (\exp(x) P_k(\exp(x)) + P'_k(t)|_{t=\exp(x)} \cdot \exp(x)) =$$

$$\exp(\exp(x)) P_{k+1}(\exp(x)) \text{ , где } P_{k+1}(t) = t(P_k(t) + (P_k(t))') \text{ .}$$

Теорема доказана.

Следствие. Многочлен в теореме имеет вид:

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^n S(n, k) t^k \text{ ,}$$

где $S(n, k)$ – числа Стирлинга 2-го рода.

Доказательство. Пусть $P_n(t) = \sum_{k=1}^n a(n, k) t^k$. Подставляя это выражение в (1), получим

$$\sum_{k=1}^{n+1} a(n+1, k) t^k = \sum_{k=1}^n a(n, k) t^{k+1} + \sum_{k=1}^n k a(n, k) t^k \text{ .}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t^k , имеем $a(n+1, k) = a(n, k-1) + k a(n, k)$ при $k = 2, \dots, n$, что совпадает с рекуррентным соотношением для чисел Стирлинга 2-го рода [1, с. 52].

С учетом краевых условий $a(0,0) = 1$, $a(n,0) = 0$ при $n > 0$, $a(n,k) = 0$ при $k > n$, найдем, что $a(n,k) = S(n,k)$. Доказательство закончено.

Отметим, что многочлен $P_n(t)$ является многочленом Белла от одной переменной [2].

Литература

1. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ, Изд-во Московского университета, М., 1985, с. 309.
2. Carlitz L. Single variable Bell polynomials. Collect. Math. 14(1962), 13-25.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ НЕПЛАНАРНЫХ ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Воблый В.А., Мелешко А.К.,
vitvobl@yandex.ru, akmeleshko@gmail.com,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация. Получены явные формулы для числа помеченных непланарных тетрациклических блоков и связных графов с заданным числом вершин.

Планарный граф – это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения ребер. Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей ребрами граф становится несвязным. Блок – связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [1, с. 41]. Гладкий граф – это связный граф без висячих вершин [2]. Под тетрациклическим графом понимается связный граф с цикломатическим числом равным 4. Гомеоморфным типом класса связных гомеоморфных графов называется общий граф (возможны петли и кратные ребра), из которого могут быть получены все графы заданного класса графов вставкой вершин степени 2 в ребро [3,4].

Теорема 1. Пусть T_n – число помеченных непланарных тетрациклических блоков с n вершинами, тогда при $n \geq 6$ верна формула

$$T_n = \frac{n!}{72} \binom{n+2}{8}. \quad (1)$$

Доказательство. Теорема Понтрягина-Куратовского утверждает, что граф планарен только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу K_5 или полному двудольному графу $K_{3,3}$. Известно, что существует 105 гомеоморфных типов гладких тетрациклических графов [7]. Из всех гомеоморфных типов тетрациклических блоков только один непланарный граф – это граф $K_{3,3}$.

Пусть гомеоморфный тип H – связный гладкий общий граф, отличный от изолированной вершины или петли, с a вершинами, b ребрами, b_0 петлями, b_i – число пучков ребер кратности i , $A(H)$ – порядок вершинно-реберной группы автоморфизмов графа H . Тогда число помеченных графов с n вершинами и гомеоморфным типом H равно [4, лемма 2]:

$$\frac{n!}{2^{b_0} A(H)} \text{Coef}_{x^{n-a}} \frac{x^{b+b_0-\sum_{i=1}^b b_i} \prod_{i=1}^b (x+i(1-x))^{b_i}}{(1-x)^b}.$$

Так как в нашем случае $H = K_{3,3}$, то $A(H) = 72, a = 6, b = 9, b_0 = 0, b_1 = 9, b_i = 0, i = 2 \dots 9$ и

$$T_n = \frac{n!}{72} \text{Coef}_{x^{n-6}} \frac{1}{(1-x)^9}.$$

С помощью известного разложения [6, с. 709]:

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} x^k, \text{ получим}$$

$$T_n = \frac{n!}{72} \text{Coef}_{x^{n-6}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+8}{8} x^k = \frac{n!}{72} \binom{n+2}{8}.$$

Доказательство закончено.

Теорема 2. Число TC_n помеченных связных непланарных тетрациклических графов с n вершинами при $n \geq 6$ равно

$$TC_n = \frac{n^{n-1}}{72} \sum_{k=6}^n \binom{k+2}{8} \frac{kn!}{(n-k)!n^k}.$$

Доказательство. Заметим, что непланарный тетрациклический граф должен иметь хотя бы один непланарный блок. Однако все унициклические, бициклические и трициклические блоки – планарные графы. Следовательно, непланарный тетрациклический граф состоит из единственного блока, который является непланарным тетрациклическим графом, и прикрепленных к нему деревьев.

Пусть V_n - число гладких связных графов с n помеченными вершинами, а A_n - число связных графов с n помеченными вершинами, не являющихся деревьями. В [5] получена формула: $A_n = \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} kn^{n-k-1} V_k$.

Подставив в эту формулу T_k из (1) вместо V_k , получим утверждение теоремы.

Отметим, что Дмитриев Е. Ф. другими методами перечислял помеченные непланарные тетрациклические блоки и связные графы, однако не опубликовал свои результаты [7].

Литература

1. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
2. Wright E. M. The number of connected sparsely edged graphs. II. J // Graph Theory, 1978 –pp. 299-305.
3. Ford G.F., Uhlenbeck G.E. Combinatorial problems in theory graphs, IV, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 43(1), pp. 163-167.
4. Степанов В. Е. О некоторых особенностях строения случайного графа вблизи критической точки.// Теория вероятн. и ее примен. – 1987 – Т. 32 – Вып. 4. – С. 633-657.

5. Воблый В. А. Асимптотическое перечисление графов некоторых типов: Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09, Москва, ВЦ АН, 1985 – 85 с.

6. Прудников А. П. и др., Интегралы и ряды, т. 1., Наука, ГРФМЛ, 1981. – 800 с.

7. Дмитриев Е.Ф. Перечисление отмеченных графов с заданными структурными свойствами: Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09, Минск, Ин-т математики АН БССР, 1986. – 130 с.

ПРО КВАЗИВИПАДКОВІ ГРАФИ ЛОГАРИФМІЧНОГО СТЕПЕНЯ

Глухов О.Д., glukhov07@gmail.com,
Національний авіаційний університет

Анотація. Розглядаються квазівипадкові графи на основі 3-зв'язних експандерів логарифмічного степеня. Показано, що такі графи мають лінійний пороговий декремент, тобто залишаються зв'язними з достатньо високою ймовірністю при видаленні певного відсотка ребер.

Abstract. We consider the quasi random graphs based on 3-connected expander of logarithmic valence. It is shown that these graphs are linear threshold decrement, i.e. it stays connected with sufficiently high probability when removing certain percentage edges.

Квазівипадкові графи описують системи, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків[1,2]. Нехай G - звичайний граф з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, квазівипадковим графом на основі графа G називається граф $G(p)$ з множиною $(G(p))^0 = G^0$ вершин і з випадковою множиною $U = (G(p))^1$, ребер:

$Prob(u \in U) = p$ при $u \in (G)^1$ і $Prob(u \in U) = 0$ при $u \notin (G)^1$.

Величину $\lambda = mq$, $q = 1 - p$ будемо називати декрементом квазівипадкового графа. Очевидно, що декремент це є математичне сподівання величини $m - |U|$. В загальному випадку декремент розглядатиметься як деяка функція: $\lambda = \lambda(m)$. Пороговим

декрементом називається найбільше значення величини λ , при якому квазівипадковий граф буде зв'язним з ймовірністю $1 - o(1)$.

Степенем $\rho(H)$ підграфа H у графі G будемо називати число $\rho(H) = |\{(x, y) \in G^1 : x \in H^0, y \notin H^0\}|$. Будемо також позначати як $\delta(G)$ і $\Delta(G)$ - відповідно найменший і найбільший степінь вершин графа G . Граф G на n вершинах будемо називати графом логарифмічного степеня, якщо виконується умова $c_1 \ln n \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq c_2 \ln n$, де c_1, c_2 - деякі додатні сталі.

Надалі розглядаються еволюція [3] квазівипадкових графів на основі експандерів логарифмічного степеня.

Теорема 1. Для достатньо великого n існує простий (без петель і кратних ребер) граф G на n вершинах логарифмічного степеня, $\delta(G) \geq c \ln n$, який є експандером, а саме задовольняє наступній умові: $\forall H \subset G (|H^0| \leq n/2 \Rightarrow \rho(H) \geq 0, 2c \ln n |H^0|)$.

Такий граф можна побудувати, наприклад, наступним чином.

Розглянемо випадковий неорієнтований граф G на n вершинах, побудований за моделлю Пінскера [4]: для кожної вершини x графа G виберемо випадково множину $V(x) \subset G^0$, $|V(x)| = d$ і визначимо множину ребер графа G наступним чином: $(x, y) \in G^1 \Leftrightarrow y \in V(x)$. Якщо тепер вибрати $d = c \ln n$, то можна показати, що після видалення кратних ребер, з достатньо великою ймовірністю такий граф G буде графом логарифмічного степеня, а також, що він з ймовірністю $1 - o(1)$ буде експандером.

Наступна теорема показує, що такий граф має достатньо великий пороговий декремент.

Теорема 2. Пороговий декремент квазівипадкового графа на основі експандера логарифмічного степеня не менше βm , де β - деяка стала.

Література

1. Глухов О.Д., Коростіль Ю.М. Структурна безпека складних дискретних систем при випадкових відмовах. - Моделювання та

інформаційні технології. Зб. наукових праць ІПМЕ НАНУ, Київ, 2004, вип. 27, с. 91-95.

2. Глухов О.Д. Проблема зв'язності частково-випадкових графів . - Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. – Київ, 2008, вип.47, с.12-15.

3. Erdos P., Renyi A. On the evolution of random graphs// Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. , 1960,V5, p.17-61.

4. M. S. Pinsker. On the complexity of a concentrator. -In 7th International Teletraffic Conference, 1973, p. 318/1–318/4.

ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ СОГЛАСОВАНИЯ ОНТОЛОГИЙ

Давидовский М.В.

m.davidovsky@gmail.com,

Запорожский национальный университет

Аннотация. Одной из актуальных задач при разработке корпоративных информационных систем является представление знаний. Однако сложность и динамизм моделируемых предметных областей порождают проблему гетерогенности моделей представления знаний. Данная проблема решается с помощью методов согласования этих моделей. Одним из методов согласования моделей знаний, представленных в виде формальных онтологий (логических описательных теорий) является метод, основанный на использовании онтологических контекстов. Этот метод даёт качественно хороший результат, но построение множества контекстов на основе перебора концепций онтологий является NP-полной задачей. В докладе предлагается фрагментарный алгоритм построения множества онтологических контекстов с приемлемой сложностью.

Abstract. Knowledge representation is one of the crucial technologies used in development of modern enterprise information systems. It is noteworthy that the complexity and dynamism of modelling domains lead to the knowledge heterogeneity problem. The problem is usually solved by using the methods for matching knowledge representation models. One of the effectual methods of this kind used for matching ontologies (logical descriptive theories) is the one based on the ontological contexts. This method gives qualitatively good results, but constructing a set of contexts using exhaustive search is an NP-complete problem. This report proposes a fragmented algorithm for constructing a set of ontological contexts with admissible complexity.

Сегодня одной из актуальных задач при разработке корпоративных информационных систем (ИС) является представление знаний. Это подтверждается многочисленными публикациями, описывающими приложения методов и моделей представления знаний в самых широких сферах промышленности и бизнеса (см., например, [1,2,3,4] и многие другие). Представление знаний позволяет использовать человеческий опыт принятия решений в различных профессиональных сферах, накопленный ведущими профессионалами и экспертами, а также использовать и распространять этот опыт путём разработки соответствующих автоматизированных технологий принятия решений [5], управления [6], проектирования [7] и производства [8], а также других передовых современных компьютерных технологий в промышленности [9]. Действительно, ИС, основанные на знаниях, позволяют решать стоящие перед ними задачи с большей эффективностью и гибкостью. Однако сложность и динамизм моделируемых предметных областей обуславливают неоднородность и многозначность моделей представления знаний. Следовательно, основанные на знаниях ИС неизбежно сталкиваются с проблемой гетерогенности знаний. Данная проблема решается путём выравнивания моделей представления знаний, т.е. определения семантических соотношений между этими моделями или, другими словами, их согласования. В [10] нами был предложен подход к согласованию различных, но семантически пересекающихся моделей знаний, представленных в виде формальных онтологий (логических описательных теорий). Подход является итерационным и основан на реализации переговоров между интеллектуальными программными агентами, где на каждом раунде переговоров агенты сравнивают онтологические контексты и используют пропозициональные подстановки с целью уменьшения семантической разницы между контекстами. В [11] мы показали, что подход даёт хорошие результаты в терминах качества полученного выравнивания онтологий. Однако при использовании подхода в промышленных системах, основанных на знаниях, возникают трудности, обусловленные высокой вычислительной сложностью алгоритма.

Так, в общем случае, математически задача построения множества контекстов может быть фактически сведена к простому перебору звёзд, являющихся подграфами заданного графа (где граф представляет собой структуру модели представления знаний). В данном докладе мы математически формализуем задачу построения множества контекстов онтологии в виде комбинаторной задачи на графах (задачи нахождения покрытия графа звёздами) и приведём фрагментарный алгоритм, позволяющий строить множества контекстов с приемлемой сложностью.

Дадим необходимые определения. Для начала приведём общее определение онтологии, рассматривающее онтологию в терминах структуры и элементов её составляющих [12].

Определение 1. Онтология O – это кортеж вида $O = \langle C, R, I, T, V, R_{\leq}, R_{\perp}, R_{\in}, R_{=} \rangle$, где C – это множество концепций (или классов); R – множество отношений (объектные свойства и свойства типов данных); I – множество индивидов (или экземпляров); T – множество типов данных; V – множество значений; R_{\leq} – рефлексивное асимметрическое транзитивное отношение над $(C \times C) \cup (R \times R) \cup (T \times T)$, которое называется специализацией (категоризацией) и которое формирует частичные упорядочивания над C и R называемые иерархиями концепций и свойств соответственно; R_{\perp} – иррефлексивное симметрическое отношение над $(C \times C) \cup (R \times R) \cup (T \times T)$, называемое исключением; R_{\in} – отношение над $(I \times C) \cup (V \times R)$, которое называется инстанцированием (также конкретизацией или реализацией); $R_{=}$ – отношение над $I \times P \times (I \cup V)$, называемое назначением. Множества C, R, I, T, V попарно не пересекаются.

Определение 2. Под контекстом концепции c будем понимать совокупность свойств, семантических отношений и других концепций вовлечённых в онтологическое определение концепции c .

Определение 3. Согласование онтологий – это процесс нахождения (обнаружения) соответствий (или отображений) между

элементами различных онтологий. Отображение (или правило отображения) это кортеж вида $m = \langle e, e', \mathfrak{R}, n \rangle$, где: e, e' являются элементами C, R, I, T, V соответствующих онтологий O и O' ; $\mathfrak{R} = \{\subset, \subseteq, \equiv, \supset, \supseteq\}$ – это множество отношений; а n – это величина достоверности (обычно лежащая в интервале $[0,1]$), отражающая степень уверенности в корректности отображения.

Далее сведём задачу структурного согласования онтологий к комбинаторной задаче на графах. В техническом отчёте¹ показано, что (OWL DL²) онтология может быть (без существенного снижения выразительной силы) представлена в виде RDF-графа. RDF-граф представляет собой граф, вершинами которого являются субъекты и объекты, а рёбрами – двуместные предикаты, связывающие субъекты с объектами [13]. Тройка «субъект – предикат – объект» называется триплетом. Таким образом можно записать определение онтологии, приведённое выше, в терминах RDF.

Определение 4. Онтологией называется RDF-граф вида $G = (SO, P)$, где SO – множество онтологических сущностей, являющихся объектами и субъектами, P – множество предикатов; $SO \in C \cup I \cup T \cup V$ и $P \in R \cup R_{\leq} \cup R_{\perp} \cup R_{\in} \cup R_{=}$.

Для определения онтологического контекста в терминах RDF напомним определение звезды из теории графов [14].

Определение 5. K -звездой называется связный граф, у которого одна (центральная) вершина имеет степень k , а все остальные вершины – степень 1.

Контекст в терминах RDF может быть представлен так:

Определение 6. Контекстом концепции $s \in C$ называется звезда $Ctx = (SO, P)$, центральной вершиной которой является

¹ <https://www.w3.org/TR/owl-semantics/mapping.html#4.2>

² <https://www.w3.org/TR/owl-guide/>

вершина $s \in SO$ с локальной степенью $k \geq 1$, представляющая собой субъект множества RDF триплетов вида $\langle c, p, o \rangle$, где $p \in P$, а вершины $o_i \neq c$, $o_i \in SO$, $i = 1, \dots, k$ с локальными степенями $v = 1$ являются объектами RDF триплетов $\langle c, p, o_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$ и имеют вершину s своим субъектом.

Далее построим фрагментарную модель на основе контекстов онтологий, представленных в виде RDF-графов. Для этого напомним основные положения теории фрагментарных структур и алгоритмов.

Следуя [15] и [16], будем называть фрагментарной структурой совокупность (X, Y, θ) . Множество X – это множество элементов произвольной природы, называемых элементарными фрагментами. Y – это семейство упорядоченных подмножеств множества X , которое будем называть множеством допустимых фрагментов. $\theta = \theta(y, x)$, $y \in Y$, $x \in X$ – условие присоединения, то есть условие, при котором фрагмент y является допустимым. Пустое множество по определению является допустимым фрагментом. Допустимый фрагмент $y \in Y$, который не является собственным подмножеством никакого другого допустимого фрагмента, будем называть максимальным. Допустимый фрагмент $y \in Y$ называется квазимаксимальным, если не существует такого элемента $x \in X$, что объединение $y \cup \{x\}$ является допустимым фрагментом.

Опишем работу фрагментарного алгоритма для отыскания квазимаксимального фрагмента на конечной фрагментарной структуре. Сначала элементарные фрагменты нумеруются и упорядочиваются. В качестве решения на начальном шаге выбирается пустое множество. На каждом шаге алгоритма ещё не выбранные элементарные фрагменты перебираются в заданном порядке. Если объединение уже построенного фрагмента с очередным элементарным фрагментом удовлетворяет условию присоединения, то элементарный фрагмент добавляется к текущему фрагменту. Если на текущем шаге не удалось найти

подходящий элементарный фрагмент, то алгоритм прекращает работу. Отметим, что результат работы фрагментарного алгоритма определяется выбором порядка следования элементарных фрагментов.

Построим фрагментарную модель для задачи согласования онтологий, представленных в виде RDF-графов. Пусть нам необходимо согласовать RDF-графы $G^A = (SO^A, P^A)$ и $G^B = (SO^B, P^B)$. В качестве элементарных фрагментов будем рассматривать кортежи вида $\langle p_i^A, p_j^B \rangle$, где $i = 1, \dots, n$ ($n = |P^A|$), $j = 1, \dots, m$ ($m = |P^B|$), $p_i^A \in P^A$, $p_j^B \in P^B$. Условием присоединения будет следующее: кортежи $\langle p_i^A, p_j^B \rangle$ строятся из рёбер $p_i^A \in P^A$ и $p_j^B \in P^B$, таких что p_i^A и p_j^B образуют с уже выбранными рёбрами из G^A и G^B соответственно звезды (т.е. принадлежат соответствующим контекстам Ctx_k^A и Ctx_l^B), либо не имеют общих вершин с уже выбранными рёбрами (т.е. могут образовывать другие контексты, отличные от Ctx_k^A и Ctx_l^B). В общем случае рассматриваются произвольные упорядочения рёбер графов G^A и G^B , каждое из которых описывается перестановкой из группы перестановок S_n и S_m . Приведём фрагментарный алгоритм с учётом того, что имеющие большие степени центральных вершин контексты, имеют большее значение в процессе согласования, т.к. содержат больше информации для сравнения и вычисления семантической разности (подобия) между ними и, следовательно, позволяют получать отображения с большей степенью уверенности (см. Определение 3).

Шаг 1. Ранжируем известными алгоритмами сортировки вершины графов G^A и G^B по возрастанию (убыванию) локальных степеней вершин.

Шаг 2. Составляем список элементарных фрагментов (пар рёбер) выбирая некоторое количество рёбер инцидентных вершинам, полученным на шаге 1.

Шаг 3. Выбираем пустое множество в качестве решения.

Шаг 4. Выбираем очередной по порядку фрагмент – пару рёбер $\langle p_i^A, p_j^B \rangle$ из списка.

Шаг 5. Если не выполняется условие присоединения, то идём на Шаг 4 (переходим к следующей паре рёбер из списка).

Шаг 6. Выбранные рёбра присоединяются к текущему фрагменту в качестве триплетов соответствующих контекстов или, другими словами, лучей соответствующих звёзд.

Шаг 7. Если контекст не построен – идём на Шаг 4.

Шаг 8. Удаляем из списка все невыбранные ребра, инцидентные центральной вершине звезды.

Шаг 9. Список элементарных фрагментов не пуст – идём на Шаг 4.

Конец работы алгоритма.

В результате работы фрагментарного алгоритма мы получаем 2 множества контекстов Ctx^A и Ctx^B соответствующих RDF-графов G^A и G^B . Далее эти множества могут быть использованы в качестве входных данных для алгоритмов согласования онтологий на основе онтологических контекстов. Сложность приведённого алгоритма оценивается как $N \cdot \ln N \cdot m \cdot n$, где N – это общее число фрагментов, использующихся при отыскании решения задачи, m – верхняя оценка трудоёмкости проверки условия присоединения на каждом шаге, а n – верхняя оценка числа фрагментов, составляющих решение задачи. Приемлемая сложность особенно важна в случае промышленных онтологий, содержащих большое количество онтологических сущностей. В дальнейшем мы планируем создание эволюционно-фрагментарного алгоритма (ЭВФ-алгоритма) [17] для решения оптимизационной задачи нахождения множества пар контекстов, имеющих минимальные значения метрик семантической разницы (или максимальные значения метрик семантического подобия). Такой алгоритм

позволит быстро получать приближённые решения задачи согласования моделей представления знаний (онтологий) в промышленных условиях, что является критически важным для ИС, оперирующих большими объёмами данных и знаний в режиме реального времени.

Литература

1. Silver G., Hassan O.H., Miller J. From Domain Ontologies to Modeling Ontologies to Executable Simulation Models. // Proc. of the 2007 Winter Simulation Conference. – 2007. – P. 1108–1117.

2. Novák P., Šindelář R. Applications of Ontologies for Assembling Simulation Models of Industrial Systems. // Meersman, R., Dillon, T., Herrero, P. (eds.) OTM-WS 2011. LNCS, Springer, Heidelberg. – 2011. – V. 7046, P. 148–157.

3. Ding Y., Fensel D., Klein M., Omelayenko B., Schulten E. The Role of Ontologies in eCommerce. // Staab, S., Studer, R. (eds.) Handbook on Ontologies. International Handbooks on Information Systems, Springer. – 2004. – P. 593–616.

4. Hepp M. Products and Services Ontologies: A Methodology for Deriving OWL Ontologies from Industrial Categorization Standards. // Int. J. on Sem. Web & Inform. Systems. – 2006. – V. 2(1). – P. 72–99.

5. Kryssanov V.V., Abramov V.A., Fukuda Y., Konishi K. A Decision-Making Support System Based on Know-How. // Proc. Of the 29th CIRP Int-l Sem. On Manufacturing Sys-s. – 1997. – P. 382–387.

6. Tzafestas S.G., Verbruggen H.B. Artificial Intelligence in Industrial Decision Making, Control and Automation. // Springer Science & Business Media. – 2012. – P. 767.

7. Толок А.В., Давидовский М.В. Обзор методов и моделей представления знаний в САПР. // Доклады конф. «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта» CAD/CAM/PDM. – 2014.

8. Prasad, B. What Distinguishes KBE from Automation. // coe.org. Archived from the original on 2012.03.24. Retr. 3 July 2014. – 2005.

9. Kendal S.L., Creen, M. An introduction to knowledge engineering. // London: Springer. – 2007. – P. 290.

10. Davidovsky M., Ermolayev V., Tolok V. Agent-Based Implementation for the Discovery of Structural Difference in OWL-DL Ontologies. // In: Kop, C. (ed.) UNISCON 2012. LNBIP, Springer, Heidelberg. – 2013. – V. 137. – P. 87–95.

11. Davidovsky M., Ermolayev V., Tolok V. Evaluation of the Ontology Instance Migration Methodology and Solution in Industrial Settings. // In: Ermolayev, V., et al. (Eds.) ICT in Education, Research, and Industrial Applications. Rev. Sel. Papers of ICTERI 2013, CCIS, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. – 2013. – V. 412. – P. 163–189.

12. Euzenat J., Shvaiko P. Ontology Matching. // Springer Science & Business Media. – 2013. – P. 511.

13. F. Manola, E. Miller. RDF Primer. // W3C. – <https://www.w3.org/TR/2004/REC-rdf-primer-20040210/>. – 2004. – retrieved 2015-11-21.

14. Дистель Р. Теория графов. // Пер. с англ. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. – 2002. – 336 С.

15. Полюга С.И. Эволюционно-фрагментарная модель задачи регулярного покрытия взвешенного графа k -звёздами. // Вісник ЗНУ: зб. наук. праць. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2011. – № 2. – С. 105–110.

16. Козин И.В., Полюга С.И. О свойствах фрагментарных структур // Вісник ЗНУ: зб. наук. праць. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2012. – № 1. – С. 99–106.

17. Козин И.В. Фрагментарные структуры и эволюционные алгоритмы // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць; ред. кол.: О. М. Кисельова (гол. ред.) та ін. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту ім. Олеся Гончара. – 2008. – С. 138–146.

КОМБІНАТОРНІ АЛГОРИТМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

Донець Г.П.

Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова

Національної академії наук України

Combinatorial algorithms decision making support

За останній час широке розповсюдження набули різного роду експертні системи, які стали комерційним продуктом на ринку нової інформаційної технології завдяки своїй корисності при розв'язанні складних, важко структурованих і формалізованих задач із сфери бізнесу, управління, планування та діагностики. В процесі економічної діяльності суб'єкта доводиться робити різні експерименти і, в залежності від отриманої інформації, приймати ті, чи інші управлінські рішення. При цьому інколи кількість альтернатив настільки велика, що виникає загроза комбінаторного вибуху. Це вимагає вироблення правил, які звужують повний перебір варіантів, або розробки спеціальних методів оптимізації перебору. Розглянемо типову задачу, яка може мати широку інтерпретацію.

Задача 1. Нехай в наявності є n альтернатив прийняття економічних рішень $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, про які тільки відомо, що серед них є m прийнятних. Існує механізм, який для фіксованого k ($k \leq m$) дозволяє визначити, чи існує серед альтернатив довільної k - вибірки хоча б одна неприйнятна. Необхідно за мінімальну кількість k - вибірок знайти k прийнятних альтернатив.

Поняття механізму, що дозволяє отримати відповідь на експеримент, можна трактувати в самому широкому розумінні слова. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Нехай n вимикачів приєднані до однієї лампочки. Відомо, що серед них m зіпсовані. Експеримент полягає в одночасному вмиканні k вимикачів. Якщо серед них є хоча б один справний, то лампочка засвічується. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти k несправних вимикачів.

Велику кількість задач про монети, серед яких є фальшиві, можна звести до задачі 1, при цьому відповіддю на різні експерименти є результат зважування на двох терезах певних комбінацій монет.

Приклад 2. Задача про лотерею. Задана множина натуральних чисел $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Випадково вибирається підмножина виграшних чисел $M = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Експеримент полягає в виборі k чисел із N_n . Необхідно вибрати мінімальну кількість таких k -вибірок, щоб хоча одна з них належала M .

Приклад 1 допоможе нам сформулювати задачу 1 у новій математичній постановці.

Задача 1'. Задано множину n чисел $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, з m одиниць та $n - m$ нулів. Експеримент полягає у виборі фіксованої кількості k ($k \leq m$) чисел, після чого стає відомим їх добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти k чисел, які дорівнюють 1.

Позначимо цю мінімальну кількість $F_m^k(n)$. В подальшому будемо розглядати задачу 1 тільки в постановці як задачу 1'. Розглянемо приклад 1 для таких значень: $n = 9, m = 4, k = 2$.

Найпростішим розв'язком є такий: пробуємо всі комбінації з двох вимикачів, поки не натрапимо на два зіпсованих – і тоді лампочка не засвітиться. Всього таких комбінацій $C_9^2 = 36$, серед них $C_4^2 = 6$ комбінацій з зіпсованими вимикачами. Отже в найгіршому випадку через 31 спробу ми розв'яжемо задачу. Більш вдалий розв'язок отримаємо, коли 9 вимикачів розіб'ємо на дві групи (5 + 4). Тоді в якійсь групі буде не менш двох зіпсованих вимикачів і, комбінуючи по два вимикачі у кожній групі, отримаємо розв'язок задачі. Щоб отримати оцінку кількості спроб, треба розглянути всі варіанти розбиття чотирьох зіпсованих вимикачів на дві групи. Якщо в групі з p вимикачів q зіпсованих ($q \geq 2$), то кількість спроб дорівнює $C_p^2 - C_q^2 + 1$. Тоді серед розбиттів (0,4), (1,3), (2,2), (3,1) та (4,0) найгірший випадок (1,3), або (3,1) дає 14 спроб. Можна розбити 9 вимикачів на чотири групи

$(3 + 2 + 2 + 2)$. Спочатку зробимо $C_3^2 + C_2^2 + C_2^2 + C_2^2 = 6$ спроб, Якщо лампочка засвітиться кожний раз, то це може бути тільки тоді, коли в кожній групі буде по одному зіпсованому вимикачу.

Беремо дві групи по 2 вимикача і комбінуємо з них 2, по одному з кожної групи. Це вимагає 4 спроби, а в сумі розв'язок отримаємо за 10 спроб. Але існує ще один розв'язок коли 9 вимикачів розбиваємо на три групи $(3 + 3 + 3)$. Тоді обов'язково знайдеться група, в якій не менш двох зіпсованих вимикачів. Кількість спроб тепер становить $C_3^2 + C_3^2 + C_3^2 = 9$, що і буде оптимальним розв'язком, іншими словами $F_4^2(9) = 9$.

Розглянемо ще одну задачу, яка тісно пов'язана з задачею 1, у математичній постановці.

Задача 2. Задано множину n чисел $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ з m одиниць та $n - m$ нулів. Експеримент полягає у виборі фіксованої кількості k ($k \leq m$) чисел, після чого стає відомим їх добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти значення заданого x_i ($1 \leq i \leq n$).

Позначимо таку кількість $C_m^k(n)$. Покажемо, що ця задача не має самостійного значення по відношенню до задачі 1. Дійсно, якщо включати x_i в кожну комбінацію з k чисел, то розв'язок ми отримаємо тільки тоді, коли будемо певні, що інші $k - 1$ чисел складаються з одиниць. Тоді добуток всіх k чисел дорівнює x_i . Таким чином ця задача зводиться до задачі 1, якщо з множини X видалити x_i і комбінувати в ній по $k - 1$ чисел. Найгірший випадок буде тоді, коли $x_i = 1$, тобто в множині X залишиться $m - 1$ одиниць. Це означає, що $C_m^k(n) = F_{m-1}^{k-1}(n-1)$, звідси і видно, що достатньо вивчати розв'язки тільки задачі 1, тобто функцію $F_m^k(n)$. Очевидно, що $F_m^m(n) = C_n^m$, тому що набір з одиниць єдиний і для його знаходження в найгіршому випадку потрібно перебрати всі комбінації. Для $k = 2$ вже є досвід розв'язування задачі. При цьому був знайдений принцип, за яким краще всього треба розбивати всю множину чисел на групи.

Принцип оптимальності: для $k = 2$ необхідно всю множину чисел розбити на стільки груп, щоб хоча в одній з них було не менш двох одиниць.

Звідси витікає, що число груп повинно бути $m - 1$.

Позначимо $\lambda \equiv n \pmod{m - 1}$.

Лема 1.

$$F_3^2(n) = \frac{n(n-2) + \lambda}{4}. \quad (1)$$

Нехай $\lambda \equiv n \equiv 0 \pmod{2}$. Тоді n розбивається на дві однакові групи з $n/2$ чисел, і

$$F_3^2(n) = C_{n/2}^2 + C_{n/2}^2 = 2 \cdot \frac{n/2(n/2-1)}{2} = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Якщо $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$, то n розбивається на два різних числа $\frac{n+1}{2}$ та $\frac{n-1}{2}$. Тоді

$$F_3^2(n) = C_{\frac{n+1}{2}}^2 + C_{\frac{n-1}{2}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \right) = \left(\frac{n-1}{2} \right)^2.$$

Можна записати загальну формулу

$$F_3^2(n) = \frac{(n-\lambda)(n-2+\lambda)}{4} = \frac{n(n-2) + 2\lambda - \lambda^2}{4}.$$

Враховуючи те, що $\lambda^2 \equiv \lambda \pmod{2}$, отримаємо формулу (1).

Лема 2. При поділі n на $m - 1$ груп отримаємо розбиття:

$$n = (m-1-\lambda) \left(\frac{n-\lambda}{m-1} \right) + \lambda \left(\frac{n-\lambda}{m-1} + 1 \right) \quad (2)$$

При діленні числа n на q отримаємо залишок $n \pmod{q}$.

Отож $n = q \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + n \pmod{q}$. Запишемо

$$q = [q - n \pmod{q}] + n \pmod{q},$$

звідки

$$n = [q - n \pmod{q}] \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + n \pmod{q} \left(\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor + 1 \right).$$

Підставляючи сюди $q = m - 1$ та $\left\lfloor \frac{n}{m-1} \right\rfloor = \frac{n-\lambda}{m-1}$, отримаємо шукану формулу (2).

Звідси легко вивести загальну формулу

$$n = \sum_{i=0}^{q-1} \left\lfloor \frac{n+i}{q} \right\rfloor. \quad (3)$$

Теорема 1.

$$F_m^2(n) = \frac{(n-\lambda)(n+\lambda-m+1)}{2(m-1)} \quad (4)$$

Скористаємося результатами леми 2 при розбитті множини чисел на $m - 1$ груп.

$$F_m^2(n) = (m-1-\lambda)C_{\frac{n-\lambda}{m-1}}^2 + \lambda C_{\frac{n-\lambda}{2}+1}^2 = \frac{m-1-\lambda}{2} \left(\frac{n-\lambda}{m-1} \right) \left(\frac{n-\lambda}{m-1} - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{n-\lambda}{m-\lambda} + 1 \right) \left(\frac{n-\lambda}{m-1} \right)$$

Після скорочень отримаємо формулу (4).

Теорема 2.

$$F_{2r+1}^3(n) = \frac{1}{6r^2} (n-\lambda)(n-\lambda-r)(n-2r+2\lambda), \quad (r \geq 1) \quad (5)$$

Для $k = 3$ знаходити отриманий розв'язок будемо користуючись принципом оптимальності. Треба розбити n на r приблизно рівних груп, тоді хоча б в одній з них буде не менш трьох одиниць. При цьому необхідно, щоб кожна група мала об'єм не менший трьох. Тому з (3) випливає

$$F_{2r+1}^3(n) = \sum_{i=0}^{r-1} C_{\left\lfloor \frac{n+i}{r} \right\rfloor}^3. \quad (6)$$

Якщо скористатись параметром $\lambda \equiv n \pmod{r}$, то групи будуть складатись з $r - \lambda$ чисел по $\frac{n-\lambda}{r}$ і λ чисел по $\frac{n-\lambda}{r} + 1$.

Тому

$$F_{2r+1}^3(n) = (r-\lambda)C_{\frac{n-\lambda}{r}}^3 + \lambda C_{\frac{n-\lambda}{r}+1}^3 = \left(\frac{r-\lambda}{6} \right) \left(\frac{n-\lambda}{r} \right) \left(\frac{n-\lambda}{r} - 1 \right) \left(\frac{n-\lambda}{r} - 2 \right) + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{n-\lambda}{r} + 1 \right) \left(\frac{n-\lambda}{r} \right) \left(\frac{n-\lambda}{r} - 1 \right). \quad (7)$$

Спрощуючи цей вираз, одержимо формулу (6).

Приклад 3. Нехай $n = 73$, $m = 11$. Тоді $r = 5$, а $\lambda=3$.

По формулі (7) при розбитті числа 73 на 5 груп (14, 14, 15, 15, 15) отримаємо

$$F_{11}^3(73) = 2C_{15}^3 + 3C_{14}^3 = 2 \cdot 364 + 3 \cdot 455 = 2093.$$

А по формулі (5) відповідно

$$F_{11}^3(73) = \frac{1}{6 \cdot 25} (73-3)(73-3-5)(73-10+6) = \frac{70 \cdot 65 \cdot 69}{150} = 2093.$$

Задача 1 може породити більш складну задачу, яка пригодиться для подальших викладень.

Задача 3. Задані множини чисел $X=\{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$ та $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$, причому в першій множині міститься m_1 одиниць ($m_1 \leq n_1$), а в другій – m_2 одиниць ($m_2 \leq n_2$). Експеримент полягає у виборі k ($k \geq 1$) чисел з будь-яких множин ($k \leq m_1 + m_2$), після чого стає відомим їх добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти k чисел, які дорівнюють 1.

Позначимо цю кількість $F_{m_1, m_2}^k(n_1, n_2)$. В загальному вигляді цю задачу ще не розв'язано. Розглянемо її частинний випадок для $k = 3$, $m_1 = m_2 = 2$. Нам необхідно знайти $F_{2,2}^3(n_1, n_2)$. Очевидно, що всі комбінації по три повинні складатися з чисел із різних множин: одне число з одної множини, а два – з другої. Ми можемо перебрати в одній множині всі комбінації по два числа і по черзі приєднувати числа з другої множини. В кінці кінців ми натрапимо на одну комбінацію з двох одиниць, а в другій натрапимо на одиницю після n_2-1 спроб. Це дає оцінку $F_{2,2}^3(n_1, n_2) \leq C_{m_1}^2 (n_2 - 1)$. Очевидно, що комбінувати по два числа треба в множині з меншою кількістю чисел, так як з $n_2 \geq n_1$ випливає

$$C_{n_2}^2 (n_1 - 1) \geq C_{m_1}^2 (n_2 - 1).$$

Але така стратегія в загальному вигляді не є оптимальною. Оптимальною є покрокова стратегія, а саме.

1. Якщо $n_2 \geq n_1$, то беремо всі комбінації по два з множини X і один елемент з множини Y , наприклад, y_1 . Якщо добуток трьох чисел хоч один раз буде дорівнювати 1, то задача розв'язана, в

протилежному разі $y_1 = 0$. Вилучаємо y_1 з множини Y , тепер її об'єм став рівний $n_2 - 1$.

2. Нехай $s = \min(n_1, n_2)$. За $|n_2 - n_1|C_s^2$ спроб ми досягнемо ситуації, коли об'єм більшої множини зменшиться до рівня меншої множини, і треба знайти $F_{2,2}^3(s, s)$. Тепер ситуація симетрична і можна комбінувати в будь-якій множині. За C_s^2 спроб ми перейдемо до ситуації з об'ємами множин $(s, s - 1)$. Тепер, комбінуючи по два у меншій множині, за C_{s-1}^2 спроб перейдемо до ситуації з об'ємами множин $(s - 1, s - 1)$.

3. На i -му кроці ($3 \leq i \leq s$) за допомогою $C_i^2 + C_{i-1}^2$ спроб ми переходимо до об'ємів множин $(i - 1, i - 1)$. Якщо добуток трьох чисел в будь-який момент буде дорівнювати 1, то задача розв'язана, інакше продовжуємо спроби.

4. В найгіршому випадку в кінці кінців дійдемо до ситуації, коли залишаться дві множини $X_1 = Y_1 = (1, 1)$. Тепер можна брати довільні 3 елементи з них, які є розв'язком задачі. Підрахуємо кількість спроб для найгіршого випадку, починаючи з об'ємів множин (s, s) .

$$\begin{aligned} & (C_s^2 + C_{s-1}^2) + (C_{s-1}^2 + C_{s-2}^2) + \dots + (C_3^2 + C_2^2) = \\ & = C_s^2 + 2 \sum_{i=3}^{s-1} C_i^2 + C_2^2 = C_s^2 + 2C_s^3 - 1. \end{aligned}$$

Тим самим доведена

Теорема 3.

$$F_{2,2}^3(n_1, n_2) = (|n_2 - n_1| - 1)C_s^2 + 2C_s^3 - 1, \quad (8)$$

де $s = \min(n_1, n_2)$.

$$\text{Зокрема, } F_{2,2}^3(s, s) = \frac{s(s-1)(2s-1)}{6} - 1. \quad (8')$$

Тепер розглянемо задачу для випадку, коли $m = 2r$, тобто необхідно знайти $F_{2r}^3(n)$. Можливі дві стратегії: розбивати n на r груп, або на $r - 1$ груп.

Розглянемо першу стратегію, яку оцінимо як F_1 . Позначимо

$$\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor = \alpha, \lambda_1 \equiv n \pmod{r} = n - \alpha r. \text{ Тоді число } n \text{ розбивається на } r - \lambda_1$$

груп по α чисел в кожній та λ_1 груп по $\alpha + 1$ чисел в кожній. По (7) необхідно зробити $(r - \lambda_1)C_\alpha^3 + \lambda_1 C_{\alpha+1}^3$ спроб. В найгіршому випадку цього не досить, бо може виникнути ситуація, коли кожна група має рівно по дві одиниці. Тоді треба скористуватися формулою (8) і зробити ще $F_{2,2}^3(\alpha, \alpha)$ спроб, якщо $\lambda \neq r - 1$, або $F_{2,2}^3(\alpha, \alpha + 1)$ для $\lambda = r - 1$. Разом це дає

$$F_1 = (r - \lambda_1) \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} + \lambda_1 \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} + \\ + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} [2 - \text{sgn}(r - 1 - \lambda_1)] + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} - 1.$$

Після перетворень отримаємо

$$F_1 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{6} [r\alpha - 2r + 3\lambda_1 + 2\alpha - 3\text{sgn}(r - 1 - \lambda_1) + 2].$$

Тепер підставимо вираз для λ_1 і остаточно маємо

$$F_1 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{6} [3(n - \text{sgn}(r - 1 - \lambda_1)) - 2(\alpha + 1)(r - 1)] - 1. \quad (9)$$

Оцінимо другу стратегію як F_2 . Позначимо

$$\left\lfloor \frac{n}{r - 1} \right\rfloor = \beta, \lambda_2 \equiv n \pmod{r - 1} = n - (r - 1)\beta.$$

Тоді число n розбивається на $r - 1 - \lambda_2$ груп по β чисел в кожній та λ_2 груп по $\beta + 1$ чисел в кожній. Але на відміну від першої стратегії тут якщо після перевірки $r - 2$ груп не досягнемо розв'язку, то це означає, що в $(r - 1)$ -й групі знаходяться не менше чотирьох одиниць. Якщо в цій групі чотири числа, то всі вони дорівнюють одиниці, тобто для розв'язку достатньо з цієї групи взяти будь-які 3 одиниці. Якщо група містить більше чотирьох чисел, то треба розбити її на дві частини. В залежності від

величини останньої групи отримаємо дві оцінки другої стратегії. Якщо $\lambda_2=0$, то всі групи мають по β чисел, в противному разі остання група має $\beta+1$ чисел. Це означає, що

$$F_2 = (r-1-\lambda_2)C_\beta^3 + (\lambda_2-1)C_{\beta+1}^3 + F_4^3(\beta+1) \quad \text{для } \lambda_2 > 0; \quad (10)$$

$$F_2 = (r-2)C_\beta^3 + F_4^3(\beta) \quad \text{для } \lambda_2 = 0.$$

Розбиваючи останню групу на дві, можемо скористатися формулами (3) та (8). В першому випадку отримаємо розбиття групи на дві компоненти

$\left(\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor, \beta+1-\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor\right)$, в другому випадку, враховуючи формулу (3), на такі

$$\left(\left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor, \beta-\left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor\right) = \left(\beta-\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor\right). \quad \text{Позначимо}$$

$\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor = \gamma$. Для перевірки необхідно зробити в першому випадку $C_\gamma^3 + C_{\beta+1-\gamma}^3$ спроб, а в найгіршому випадку ще $F_{2,2}^3(\gamma, \beta+1-\gamma)$.

Враховуючи вираз для λ_2 , після перетворень першої формули отримаємо остаточний вигляд

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)}{6} [3n - (\beta+1)(2r-1) + C_{\left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor+1}^3 + \left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor C_{\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor}^2 - 1] \quad \text{для } \lambda_2 > 0. \quad (11)$$

Для другого випадку необхідно спочатку зробити $C_{\beta-\gamma}^3 + C_\gamma^3$ перевірок, а потім ще $F_{2,2}^3(\beta-\gamma, \gamma)$ спроб. В результаті перетворень остаточно отримаємо

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6} (r-2) + C_{\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor}^3 + \left\lfloor \frac{\beta-1}{2} \right\rfloor C_{\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor}^2 - 1 \quad \text{для } \lambda_2 = 0. \quad (12)$$

Переконаємось на прикладах про справедливість отриманих формул.

Оцінити, яка стратегія з двох краща, поки що не вдалося. На чисельних експериментах в залежності від різних значень r та n висновок про перевагу якої-небудь з них неоднозначний.

Для $k > 3$ виведення формул ускладнюється, а кількість стратегій збільшується.

Отже можна сказати, що для ситуацій, в яких треба розпізнавати різну структуру множин, започатковано підхід, який за допомогою набору формул дозволяє чітко визначити відповідну ситуацію. Цей підхід передбачає подальше удосконалення.

ПРОБЛЕМИ ПОШУКУ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Дреєва Ганна Миколаївна, Дреєв Олександр Миколайович
Кіровоградський національний технічний університет

Fractal dimension numerical sequence in modern science used to analyze network traffic characteristics, natural processes, changes in economic indicators, and more. Therefore, the exact definition of fractal dimension is an important task. However, current methods for determining the fractal dimension [1, 3] do not meet modern requirements for methods of calculating fractal dimension index. The main problem is the length of the base sequence justification for finding the fractal dimension.

Фрактальная размерность числовой последовательности в современной науке используется для анализа свойств трафика сети, природных процессов, изменений экономических показателей и прочее. Поэтому точное определение фрактальной размерности является важной задачей. Однако современные методы определения фрактальной размерности [1, 3] не соответствуют современным требованиям к методам расчета показателя фрактальной размерности. Основной проблемой является обоснование длины базовой последовательности для проведения поиска фрактальной размерности.

Фрактальна розмірність числової послідовності в сучасній науці використовується для аналізу властивостей трафіку мережі, природних процесів, змін економічних показників та інше. Тому точне визначення фрактальної розмірності є важливою задачею. Однак сучасні методи визначення фрактальної розмірності [1, 3] не відповідають сучасним вимогам до методів розрахування показника фрактальної розмірності. Основною проблемою є обґрунтування довжини базової послідовності для проведення пошуку фрактальної розмірності.

Для випадкового процесу фрактальна розмірність складає $D=1,5$. Приклад такого випадкового процесу з рівномірним розподілом показано на рис. 1. З рис. 1 видно, що при випадковому процесі спостерігається кластеризація додатних та від'ємних значень, при цьому довжина знакосталих послідовностей має досить великі відхилення.

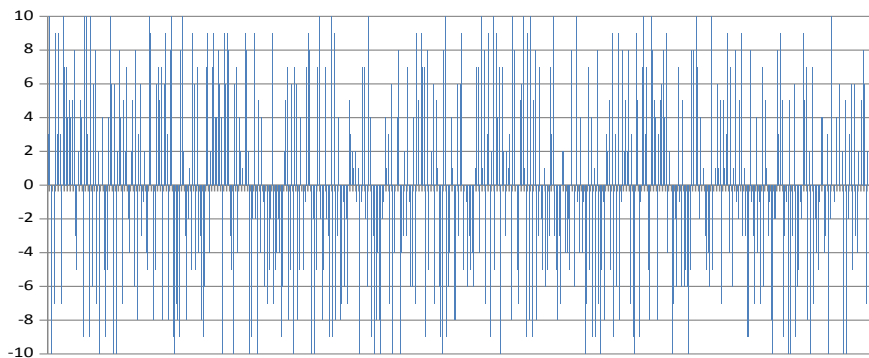


Рис. 1 — Послідовність випадкових чисел, фрактальна розмірність $D=1,5$

На рис. 2. показано ті ж значення за модулем, але знак наступного значення змінюється з ймовірністю 0,1. В такому випадку спостерігається укрупнення знакосталих кластерів. За побудовою такого ряду, математичне сподівання та дисперсія числової послідовності залишається незмінною. Однак фрактальна розмірність, при визначенні по зміні довжини кривої огинання усереднених значень, стає меншою за 1,5 і залежить від вибору інтервалу дослідження. При аналізованні довгих числових рядів, розмір укрупнених кластерів перестає відігравати значну роль, і визначення фрактальної розмірності не безпосередніми методами (наприклад критерій Хьорста за результатами R/S аналізу) дає значення 1,5 як для випадкової величини.

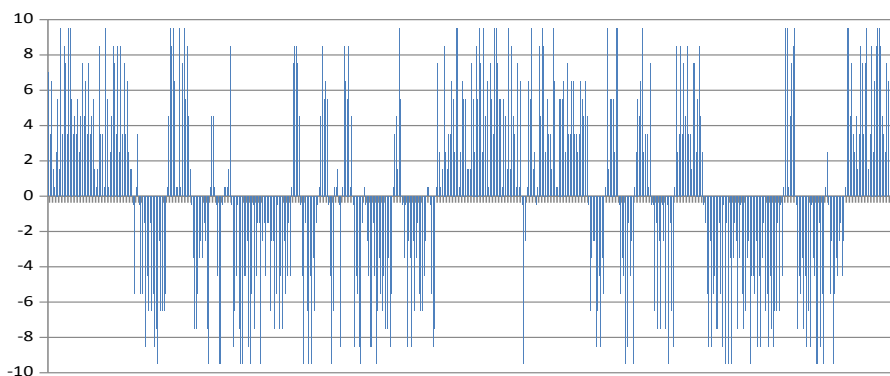


Рис. 2 — Послідовність випадкових чисел, фрактальна розмірність $D < 1,5$

На рис. 3 показано модифікацію послідовності з рис. 1, в якій кожне наступне значення зберігає знак з ймовірністю 0,1. Очевидним є результат відсутності крупних знакосталих кластерів. Також для представленого ряду визначення фрактальної розмірності за змінами довжин кривих дає значення $D > 1,5$. Однак, й для цієї послідовності при досить довгому ряду, маємо оцінку фрактальної розмірності з R/S аналізу близьку до 1,5, що відповідає випадковому процесу.

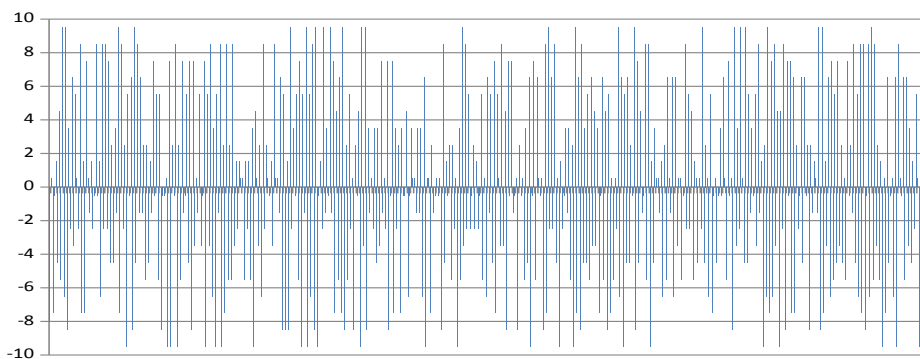


Рис. 3 — Послідовність випадкових чисел, фрактальна розмірність $D > 1,5$

Авторами аналітично доведено, що при збільшені кількості елементів випадкового процесу, фрактальна розмірність не залежить від розподілу ймовірності й завжди прямує до значення 1,5. Це свідчить про те, що відхилення значення фрактальної розмірності від 1,5 означає відсутність одного з компонентів випадковості. Однак, ці відмінності можуть впливати на статистичні характеристики лише локально і стандартними методами на довгих ділянках можуть бути виявлені за допомогою методів, які не засновані на усереднених статистичних даних. Така ситуація може бути наслідком фізичних обмежень на процеси, які досліджуються. Наприклад, комп'ютерна мережа має межу пропускання, тому розподіл не може мати аномалії нескінченного характеру й на достатньо великому проміжку R/S аналіз надаватиме показних Хьорста $H=0,5$, що відповідає фрактальній розмірності $D=1,5$.

Зазначена ситуація призводить до протиріччя: для визначення Фрактальної розмірності є необхідним використовувати досить короткі масиви реалізацій досліджуваного процесу, однак при цьому значно падає достовірність результатів розрахунків з причини статистичного відхилення. Вказане протиріччя спонукає велику кількість авторів до подальшого дослідження методів визначення фрактальної розмірності числової послідовності [1, 2, 3, 4]. Зокрема, експериментальні дані можна накопичувати до стабілізації фрактальної розмірності біля значення 1,5 й використовувати результат як обґрунтування використання в подальшому стандартних статистичних методів, які не враховують фрактальну природу.

З метою вдосконалення засобів та методів визначення фрактальної розмірності числової послідовності, авторами використано дослідження даних, що утворені напіввізницею послідовних вхідних значень. Доведено, що утворена послідовність збігає значення фрактальної розмірності.

Література

1. Г. Н. Доля, Р. Э. Пашенко, А. Н. Скрипка Вычисление размерностей временного ряда фотоотсчетов полученных при лазерном зондировании турбулентной трассы/ Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» № 780, 2007, с.94-104
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: Логос, 2002. – 664 с.
3. Ю. А. Калущ, В. М. Логинов, Показатель Хёрста и его скрытые свойства/ Сиб. журн. индустр. матем., 2002, том 5, номер 4, 29–37
4. Бельков Д.В. Исследование сетевого трафика// Наукові праці ДонНТУ, серія "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка" випуск 10 (153)

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ КОМБИНАТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Емец О.А., Барболина Т.Н.
yemetsli@ukr.net, tm-b@ukr.net

*Полтавский университет экономики и торговли
Полтавский национальный педагогический университет
имени В.Г.Короленко*

Аннотация. В докладе рассматриваются евклидовы задачи лексикографической комбинаторной оптимизации на размещениях с дробно-линейной целевой функцией. Предложен и обоснован метод формирования множества всех максималей в безусловной задаче максимизации дробно-линейной целевой функции. На основе этого предложен метод решения безусловной задачи лексикографической оптимизации. Обоснован двухэтапный алгоритм решения задачи лексикографической максимизации дробно-линейной целевой функции с линейными ограничениями. Рассмотрены алгоритмы метода построения лексикографической эквивалентности для решения задач лексикографической оптимизации дробно-линейной функции на размещениях.

Abstract. The report deals with Euclidean problems of lexicographic combinatorial optimization on arrangements with linear-fractional objective function. Method for construction of the set of minimals in unconditional linear-fractional maximization problems is proposed and substantiated. Based on this result the authors propose the method of solving unconditional lexicographic optimization problems. We substantiate two-stage algorithm for solving lexicographic maximization problem with linear-fractional objective function and linear constraints. The algorithms of the method of lexicographic equivalence construction for lexicographic linear-fractional optimization problem on arrangements are considered.

Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах привлекают значительный интерес исследователей. Исследуются свойства комбинаторных и поликомбинаторных множеств, а также различных классов оптимизационных задач на таких множествах. Одним из важных классов задач евклидовой комбинаторной оптимизации являются задачи лексикографической оптимизации на размещениях. Данный доклад посвящен изучению свойств евклидовых задач лексикографической комбинаторной оптимизации дробно-линейной функции на размещениях.

Пусть $\Phi(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}$, $E_\eta^k(G)$ — общее множество

размещений $[1, 2]$ из элементов мультимножества $G = \{g_1, \dots, g_\eta\}$.

Будем считать, что для любой точки $x \in E_\eta^k(G)$ справедливо

неравенство $\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 > 0$. Рассмотрим сначала безусловную

задачу лексикографической комбинаторной оптимизации на размещениях с дробно-линейной целевой функцией, то есть задачу

поиска пары $\langle \Phi(x^*), x^* \rangle$ такой, что

$$\Phi(x^*) = \operatorname{lexmax}_{x \in R^n} \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}; \quad x^* = \operatorname{arglexmax}_{x \in R^n} \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}, \quad (1)$$

$$(x_1, \dots, x_k) \in E_\eta^k(G). \quad (2)$$

где $n = k$.

Пусть Φ^* — максимум в задаче (1), (2). Тогда для любой точки $x \in E_\eta^k(G)$ имеет место неравенство $\Phi(x) \leq \Phi^*$, которое равносильно $\sum_{j=1}^k (c_j - \Phi^* d_j) x_j \leq \Phi^* d_0 - c_0$. Вместе с функцией $\Phi(x)$

рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sum_{j=1}^k (c_j - \Phi^* d_j) x_j$. Для любой точки $x \in E_\eta^k(G)$ имеем $\varphi(x) \leq \Phi^* d_0 - c_0$, то есть величина $\varphi^* = \Phi^* d_0 - c_0$ является максимумом линейной функции $\varphi(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$. Из эквивалентности условий $\Phi^*(x) = \Phi^*$ и $\varphi(x) = \varphi^*$ также следует, что точка x' является максимальной функции $\varphi(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$ тогда и только тогда, когда она является максимальной в задаче (1), (2).

Перенумеруем переменные таким образом, чтобы коэффициенты функции $\varphi(x)$ были упорядочены по невозрастанию:

$$c_{u_1} - \Phi^* d_{u_1} \geq c_{u_2} - \Phi^* d_{u_2} \geq \dots \geq c_{u_k} - \Phi^* d_{u_k} \quad (3)$$

(если $c_{u_j} - \Phi^* d_{u_j} = c_{u_t} - \Phi^* d_{u_t}$, то полагаем $u_j < u_t$ при $j < t$) и обозначим $c'_j = c_{u_j} - \Phi^* d_{u_j}$, $y_j = x_{u_j}$ для всех $j \in J_k = \{1, \dots, k\}$. Пусть $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m)$ — первичная спецификация мультимножества $\{c'_1, \dots, c'_k\}$, элементы которой упорядочены в соответствии с порядком возрастания элементов основы; $p_1 = 1$, $p_{i+1} = p_i + \bar{p}_i$ $\forall i \in J_m$.

Пусть $x^* = (g_{l_1}, \dots, g_{l_k})$ — максимальная функция $\Phi(x)$ на множестве $E_\eta^k(G)$ (для нахождения максимали может быть использован аналитический метод, предложенный в [1]). Тогда

соответствующая точка $y^* = (x_{u_1}, \dots, x_{u_k}) = (g_{r_1}, \dots, g_{r_k})$, где $r_j = l_{u_j}$.

Обозначим $I = \{i \in J_m \mid c_{p_i} \neq 0\}$ и рассмотрим разбиение числа k на m слагаемых $k = \bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_m$ и разбиение множества J_η на m подмножеств N'_i по правилу:

$$N'_i = \begin{cases} \{l_j \mid j \in \bar{N}_i\}, \text{ где } \bar{N}_i = \{u_{p_i}, \dots, u_{p_{i+1}-1}\}, \text{ если } i \in I, \\ J_\eta \setminus \bigcup_{i \in I} N'_i, \text{ если } c_{p_j} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Показано, что точка $y' = (y'_1, \dots, y'_k)$ является максимальной функции $\varphi(y) = \sum_{j=1}^k c'_j y_j$ на множестве $E_\eta^k(G)$ тогда и только тогда, когда она является элементом множества полиразмещений [3, 4] $E_\eta^{ks}(G, H) = \{(g_{\pi(1)}, \dots, g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H\}$, где H — множество всех k -выборок из множества J_η вида

$$\pi = (\pi(1), \dots, \pi(k)) = (\pi_{11}, \dots, \pi_{1k_1}, \dots, \pi_{s1}, \dots, \pi_{s k_s}) = (\pi^1, \dots, \pi^s), \quad (5)$$

$\pi^i = (\pi_{i1}, \dots, \pi_{ik_i})$ — произвольная k_i -выборка из множества N'_i $\forall i \in J_m$, определенного согласно (4).

Следовательно, точка x' также является максимальной в задаче (1), (2) тогда и только тогда, когда для всех $j \in J_k$ $x'_{u_j} = y_j$, где $(y_1, \dots, y_k) \in E_\eta^{ks}(G, H)$.

Пусть для всех $i \in J_m$ π^i — лексикографически максимальная выборка из множества N'_i . Если элементы мультимножества G упорядочены по неубыванию, то выборка (5) определяет лексикографически максимальный элемент \tilde{y} множества $E_\eta^{ks}(G, H)$. Учитывая также способ перенумерации переменных, получаем, что точка \tilde{x} , для которой $\tilde{x}_{u_j} = \tilde{y}_j \quad \forall j \in J_k$, является лексикографической максимальной в задаче (1), (2).

Таким образом, для решения задачи (1), (2) следует при помощи аналитического метода [1] найти какую-либо максималь

функции $\Phi(x)$ на множестве $E_{\eta}^k(G)$, затем сформировать множества (4) и, используя лексикографически максимальный элемент соответствующего множества $E_{\eta}^{ks}(G, H)$, записать соответствующую точку x .

Рассмотрим теперь задачу лексикографической комбинаторной оптимизации на размещениях с дробно-линейной целевой функцией и линейными дополнительными (некомбинаторными) ограничениями: найти пару $\langle \Phi(x^*), x^* \rangle$ при условиях (2) и

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in J_m. \quad (6)$$

Считаем, что выполняется условие $\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 > 0$ для любой точки, удовлетворяющей (6).

Для решения задач такого вида может использоваться метод построения лексикографической эквивалентности (метод ПолЭ), обоснованный для различных классов оптимизационных задач в [1], [2]. В алгоритмах метода ПолЭ как вспомогательная используется задача, которая получается из исходной комбинаторной задачи заменой комбинаторного условия (2) условием принадлежности выпуклой оболочке множества размещений — общему многограннику размещений $\Pi_{\eta}^k(G)$ [3].

Как показано в [1], задача максимизации функции $\Phi(x)$ при условиях (6) и

$$(x_1, \dots, x_k) \in \Pi_{\eta}^k(G) \quad (7)$$

может быть заменена с помощью преобразования ψ вида

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{t=1}^u d_t x_t + d_0}, \quad y_t = x_t y_0 \quad \forall t \in J_u, \quad x \in R^n \text{ эквивалентной задачей}$$

линейного программирования, которую будем называть ψ -задачей. Однако в случае лексикографической оптимизации такая эквивалентность места не имеет. Действительно, пусть

$y^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_u^*)$ — лексикографическая максимальь в ψ -задаче, $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_u)$ — максимальь в ψ -задаче, отличная от y^* . Если $y_0^* = \bar{y}_0$ (а следовательно, $y_0^* > \bar{y}_0$), то может оказаться, что $\bar{x} >_l x^*$ (тут и далее $>_l$ является символом лексикографического порядка):

например, при $y_1^* = \bar{y}_1$ имеем $x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = \frac{\bar{y}_1}{y_0^*} < \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_0} = \bar{x}_1$.

Пусть $\langle \tilde{\Phi}, \tilde{y} \rangle$ — решение ψ -задачи. Тогда также $\tilde{\Phi}$ — максимум в задаче (1), (6), (7) и любая максимальь в этой задаче удовлетворяет условию $\Phi(x) = \tilde{\Phi}$. Последнее условие эквивалентно следующему

$$\sum_{j=1}^n (c_j - \tilde{\Phi} d_j) x_j = \tilde{\Phi} d_0 - c_0. \quad (8)$$

Поэтому если x' — лексикографически максимальная точка множества (6)–(8), то $\langle \Phi(x'), x' \rangle$ — решение задачи (1), (6), (7).

Как показано в [2], лексикографически максимальной точкой многогранника, определенного условиями (6)–(8) является максимальь в задаче поиска пары $\langle \bar{\Phi}(x^*), x^* \rangle$ такой, что

$$\bar{\Phi}(x^*) = \operatorname{lexmax}_{x \in R^n} \sum_{j=1}^n (c_j - \zeta d_j) x_j, \quad x^* = \arg \operatorname{lexmax}_{x \in R^n} \sum_{j=1}^n (c_j - \zeta d_j) x_j \quad (9)$$

при условиях (6), (7), и

$$\sum_{j=1}^n (c_j - \zeta d_j) x_j \leq \zeta d_0 - c_0, \quad (10)$$

где $\zeta = \tilde{\Phi}$.

Таким образом, решение задачи (1), (6), (7) можно разделить на два этапа: на первом решается ψ -задача, на втором — задача (6), (7), (9), (10), где ζ^h — максимум в ψ -задаче.

Метод ПОЛЭ основывается на разбиении многогранника на классы эквивалентности по отношению лексикографической

эквивалентности точек пространства R^n относительно k -размещений (λ_k -классы). Терминология и основные факты относительно лексикографической эквивалентности точек относительно размещений приведены в [1], [2]. Каждое размещение $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \in E_\eta^k(G)$ определяет λ_k -класс, элементами которого являются точки вида $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_u)$. Такие λ_k -классы называем комбинаторными. На множестве λ_k -классов вводится линейный порядок в соответствии с лексикографически порядком их представителей.

Если известно дискретное множество A , которому принадлежат значения целевой функции, то экстремаль в задаче (1), (2), (6) находится на одной из гиперплоскостей вида

$$\sum_{j=1}^n (c_j - \zeta d_j) x_j = \zeta d_0 - c_0. \quad (11)$$

Пусть множество $M(\zeta)$ определяется условиями (2), (6), (11). Тогда лексикографическая экстремаль в задаче (1), (2), (6) является лексикографически максимальной точкой множества $M(\zeta)$, где ζ — наибольший элемент множества A , при котором $M(\zeta) \neq \emptyset$.

Второй алгоритм метода ПолЭ использует направленный перебор λ_k -классов в порядке лексикографического возрастания и лексикографического убывания. Во время перебора из рассмотрения исключаются те λ_k -классы, все представители которых доставляют целевой функции значение меньше, чем полученные на предыдущих итерациях. Значит, из рассмотрения исключаются точки, которые не удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^n (c_j - \sigma d_j) x_j \geq \sigma d_0 - c_0, \quad (12)$$

где σ — наибольшее значение целевой функции, полученное на предыдущих итерациях.

Вместе с рассмотренными выше алгоритмами обоснован приближенный алгоритм метода ПолЭ, который позволяет

получить допустимое решение, для которого значение целевой функции отличается от оптимума не более, чем на заданную величину Пусть ζ — максимум целевой функции $\Phi(x)$ на множестве (6), (7); $\tau = \Phi(x'')$, где x'' — некоторая допустимая точка. Тогда для любой экстремали в задаче (1), (2), (6) выполняется условие $\tau \leq \Phi(x) \leq \zeta$. Положив $\sigma = \frac{\tau + \zeta}{2}$, найдем комбинаторные λ_k -классы, представители которых удовлетворяют условиям (10) и (12) (то есть удовлетворяют неравенству $\sigma \leq \Phi(x) \leq \zeta$). Если такой λ_k -класс будет найден, то обновляем значение τ , иначе максимум целевой функции не превышает σ , поэтому обновляет значение ζ . Процесс продолжается, пока не будет достигнута необходимая точность.

Изложенные в докладе подходы к решению задач лексикографической оптимизации на размещениях могут быть модифицированы для решения других классов евклидовых задач комбинаторной оптимизации, в том числе и с различными видами неопределенности.

Литература

1. Емец О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / О. А. Емец, О. А. Черненко. — К. : Наукова думка, 2011. — 154 с. — Режим доступа: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467..>
2. Емец О.А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. — К. : Наукова думка, 2008. — 159 с. — Режим доступа: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473>.
3. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г.Стоян, О.О.Ємець. — К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — Режим доступа: <http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487>.
4. Стоян Ю.Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. — Полтава : РВЦ

АЛГОРИТМ ПОШУКУ САМООПИСУЮЧОЇ НУМЕРАЦІЇ ГРАФУ

О.В.Ізвалов, к.т.н., izvalov.klanau@gmail.com

*Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного
університету*

Вступ

Поточне дослідження було розпочато у [1] наданням визначення для само описуючої нумерації графу першого типу (С1-нумерації). С1 нумерація графу є такою, при якій число у кожній вершині дорівнює кількості суміжних вершин, що занумеровані числами іншими, ніж дана. Приклад С1-нумерації наведено на рис.1. Для кожної вершини з числом 2 рівно 2 сусіди занумеровані не двійкою. А для кожної вершини з числом 4 рівно 4 сусіди занумеровані не четвіркою.

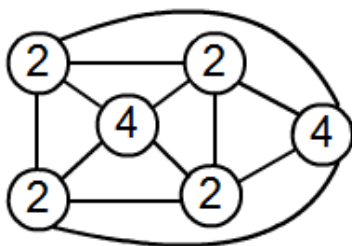


Рис.1. Приклад С1-нумерації

Пошук С1-нумерації

Виходячи з властивостей С1-нумерації, визначених у [2-4] запропоновано наступний алгоритм її побудови.

1. Для кожної вершини a_i визначається множина B_i можливих значень для числа у ній. Ця множина складається з усіх цілих чисел з проміжку $[1; d(a_i)]$

2. Розглядаємо сусідні вершини c_{ij} . Якщо $d(a_i) > \max(d(c_{ij}))$, то з множини V_i віднімаємо цілі числа з проміжку $[\max(d(c_{ij})); d(a_i)-1]$

3. У випадку, якщо для деякої вершини множина V_i складається з єдиного елементу, то присвоюємо цій вершині даний номер

4. Якщо вершині a_i присвоєно певний номер k_i і серед $d(a_i)$ її сусідів рівно $d(a_i) - k_i$ мають номер k_i , то число k_i забирається з усіх множин можливих значень V_{ij} решти сусідів вершини a_i .

5. Якщо вершині a_i присвоєно певний номер k_i і серед $d(a_i)$ її сусідів рівно k_i мають номер, який не дорівнює k_i , то решта її сусідів занумеровується числом k_i . Якщо при цьому хоча в одній з множин V_{ij} число k_i відсутнє, то переходимо до кроку 7.

6. У випадку, якщо для деякої вершини множина V_i пуста, то переходимо до кроку 7, інакше – до кроку 8

7. Робимо відкат на 1 крок у історії перебору

8. У випадку, якщо однозначне присвоєння номеру жодній вершині неможливо, то для першої з таких вершин робимо крок перебору, записуючи його у історію для можливості відкату.

9. Повертаємося до кроку 3

10.

Приклад роботи алгоритму

Розглянемо граф з 17 вершин на рис.1. Біля вершин позначено множини можливих номерів V

Висновок

Отримано значний прогрес у пошуку C1-нумерацій графів. Після комп'ютерної реалізації алгоритму буде складено словник C1-графів. Попередні результати показують, що, принаймні для невеликих графів ті, які допускають C1-нумерацію, зустрічаються частіше тих, які її не допускають, але для того, щоб робити узагальнюючі твердження необхідне продовження роботи.

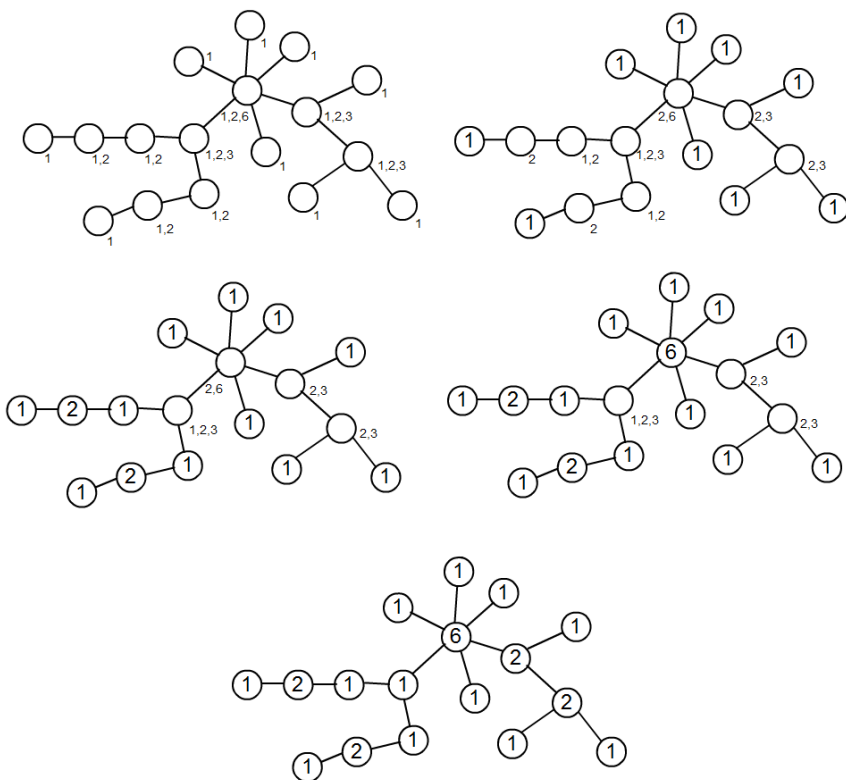


Рис.2. Знаходження C1-нумерації графу.

Література

1. Извалов А.В. Самоописывающие нумерации графов //Материалы Международного научного семинара «Дискретна математика та її застосування у економіко-математичному моделюванні та інформаційних технологіях» (Запорожье, 11-13 октября 2012 г.). – Запорожье: ДВЗН Запорожский національний університет, 2012. – С. 32-33.
2. Извалов А.В. Конструирование графов, допускающих самоописывающие нумерации //Материалы XV Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их применение» (13-14 апреля 2013 г.) – Кировоград – С.46-49.

3. Извалов А.В. Подсчёт базовых самоописывающих графов //Материалы XVI Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их применение» (11-12 апреля 2014 г.) – Кировоград – С.49-52

4. A.Izvalov, Self –descriptive trees, //Матеріали XVII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (17-18 квітня 2015 г.) – Кировоград – С.47-51

О ГЕНЕРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

Козин И.В., Ботовский С.Э.

ainc00@gmail.com, user.sergey.b@gmail.com,

Запорожский национальный университет

Аннотация. Многие массовые оптимизационные задачи на графах относятся к разряду трудных и NP-трудных задач [1]. Для этих задач на сегодня неизвестны алгоритмы полиномиальной трудоемкости. К числу таких задач относится задача коммивояжера, задача покрытия графа звездами, задача о максимальной клике, задача выделения максимального планарного подграфа и многие другие. Поскольку все эти задачи имеют многочисленные приложения, на практике для них оправдана разработка разного рода метаэвристик, в частности эволюционных алгоритмов. К сожалению метаэвристические методы, как правило, не имеют оценок сходимости и поэтому судить об их качестве можно лишь на основе сравнений с известными алгоритмами или результатами. Разработан ряд тестовых библиотек, позволяющих проверять алгоритмы на отдельных задачах с известным оптимальным решением или улучшать существующие рекорды. Другим способом сравнения является алгоритмов помощью проверки алгоритмов на большом числе индивидуальных задач и вычисление таким образом «средних» характеристик качества. В связи с этим возникает задача создания генератора случайных графов, с помощью которого можно генерировать большое число графов с различными свойствами и проверять на большом массиве индивидуальных задач характеристики различных алгоритмов.

Abstract.

Many mass optimization problems on graphs are classified as hard and NP-hard problems [1]. For these problems are unknown to the algorithms of polynomial complexity today. These problems include the traveling salesman problem, the problem of coverage Count the stars, the problem of the maximum clique problem of

extracting the maximum planar subgraph and many others. Since all of these problems have numerous applications, in practice, is justified for their development metaheuristics various kinds, in particular evolutionary algorithms. Unfortunately metaheuristic methods typically do not have the convergence assessment and therefore judged their quality can only be based on comparisons with known algorithms or results. A number of test libraries that enable checking algorithms on individual problems with known optimal solution or improve existing records. Another way to compare is by checking algorithms algorithms on a large number of individual tasks and calculation so "average" quality characteristics. In this regard, the problem arises of creating the random graphs by which to generate a large number of graphs with different properties and to check for a large array of individual tasks of the different algorithms.

Простейшей моделью для генерации случайных графов является модель Эрдеша – Реньи [2], в которой параметром генерации является вероятность $\alpha \in [0,1]$ появления ребра графа. Эта вероятность одинакова для всех ребер. Пусть в графе $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E число вершин равно заданному числу $n = |V|$. Вероятность появления произвольного графа с набором ребер E определяется величиной

$$P(G) = \alpha^m (1 - \alpha)^{N-m}, \text{ где } N = C_n^2, \quad m = |E|.$$

Будем предполагать, что вершины графа занумерованы числами $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Процедура генерации матрицы смежности $(c[i, j])_{i,j=1}^n$ графа в этой модели крайне проста. Пусть функция $rnd()$ генерирует случайное число на промежутке $[0,1]$. Тогда процедура генерации матрицы смежности имеет вид

for $i=1$ to n : for $j=i+1$ to n

$$c[i, j] = \text{if}(rnd() \leq \alpha, 1, 0) \quad (1)$$

next j : next i

Однако, как правило, для тестовых задач обязательным является наличие связности, а в модели Эрдеша-Реньи при малых значениях α высока вероятность генерации несвязного графа. Для гарантии связности графа предлагается на первом этапе случайным образом генерировать дерево с заданным набором вершин, а уже потом дополнять полученное дерево ребрами в соответствии с вышеприведенным алгоритмом.

Для генерации дерева предлагается следующая процедура. Рассматриваются два числовых массива I_1 и I_2 . На начальном этапе $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 3, \dots, n\}$. На очередном шаге выбирается случайным образом индекс $i_1 \in I_1$ и индекс $i_2 \in I_2$. Полагаем $c[i_1, i_2] = 1$, индекс i_2 удаляется из массива I_2 и заносится в массив I_1 . Количество шагов в этой процедуре $n-1$. Эта процедура применяется после генерации случайного графа в модели Эрдеша-Реньи

Иногда для проверки эффективности алгоритмов поиска гамильтоновых циклов в графе необходимо, чтобы в случайном графе, который используется для тестирования, присутствовал гамильтонов цикл. При генерации такой цикл будем задавать случайной перестановкой вершин. Для формирования случайной перестановки воспользуемся алгоритмом Фишера-Йетса [3]. Зададим массив $a[] = (1, 2, \dots, n)$. Пусть функция $round(x, 0)$ - округление числа x до целого. Процедура формирования массива перестановки имеет вид:

```
for i=1 to n
  j=1+round(rnd()*(n-1),0)
  v=a[i]: a[i]=a[j]: a[j]=v
next i
```

После формирования массива $a[]$ генерируется случайный цикл в графе следующей процедурой

```
for i=1 to n-1
  c[a[i],a[i+1]]=1
next i: c[a[n],a[1]]=1
```

Процедура генерации случайного цикла применяется после формирования случайного графа в модели Эрдеша-Реньи.

Рассмотрим еще один случай генерации случайного графа с ограничением на степени вершин. Пусть степени вершин графа ограничены сверху числом d_0 . Тогда процедура генерации графа в модели Эрдеша –Реньи слегка изменяется. Введем массив степеней вершин $D[]$. На начальном этапе все элементы этого массива равны 0. Процедура генерации графа имеет вид

```
for i=1 to n: for j=i+1 to n
```


if $D[i] \leq d_0$ and $D[j] \leq d_0$ then

$c[i, j] = \text{iif}(\text{rnd}() \leq \alpha, 1, 0): D[i] = D[i] + 1: D[j] = D[j] + 1:$

next j : next i

При генерации связного графа видоизменяется процедура построения остоного дерева графа. На каждом шаге построения дерева после добавления ребра (i_1, i_2) степени вершин этого ребра $D[i_1]$ и $D[i_2]$ увеличиваются на 1. Если при этом появляется равенство $D[i_1] = d_0$, то вершина i_1 удаляется из массива I_1 . Причем в этом случае сначала строится остоное дерево, а потом в соответствии с моделью Эрдеша-Реньи генерируются другие ребра графа.

Пусть степени вершин графа ограничены снизу числом $d_0 \leq n - 1$. Тогда в модели Эрдеша –Реньи генерируется случайный граф с ограничениями на степени вершин сверху числом $n - 1 - d_0$ и берется его дополнение до полного графа с n вершинами.

Немного отличается от приведенных процедура генерации связного графа, при условии, что степени его вершин ограничены снизу числом d_0 . Вначале генерируется остоное дерево с матрицей смежности $(t[i, j])_{i,j=1}^n$ и формируется массив $D_1[]$ степеней вершин для этого дерева. Затем выполняется процедура формирования дополнения случайного графа с матрицей смежности $(c_{dop}[i, j])_{i,j=1}^n$ по алгоритму

for $i=1$ to n : for $j=i+1$ to n

if $D[i] \leq n - 1 - d_0 + D_1[i]$ and $D[j] \leq n - 1 - d_0 + D_1[j]$ then

$c_{dop}[i, j] = \text{iif}(\text{rnd}() \leq \alpha, 0, 1): D[i] = D[i] + 1: D[j] = D[j] + 1:$

next j : next i

На последнем шаге формируется матрица смежности требуемого связного графа процедурой

for $i=1$ to n : for $j=i+1$ to n

$c[i, j] = \min\{1, 1 - c_{dop}[i, j] + t[i, j]\}:$

next j : next i

Рассмотрим один частный случай генерации случайного связного графа с ограничением сверху на степени вершин. Пусть произведение nd_0 чётно и параметр генерации $\alpha=1$. Тогда в результате генерации будет получен случайный граф, степень вершин которого в точности равна d_0 . То есть предложенный метод позволяет генерировать случайные регулярные графы.

Приведенные процедуры генерации случайных графов использованы в программной системе тестирования эволюционно фрагментарных алгоритмов для различных классов оптимизационных задач на графах.

Литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи; пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
2. Берновский М.М., Кузюрин Н.Н. Случайные графы, модели и генераторы безмасштабных графов // Труды Института системного программирования РАН. Том 22. 2012. С. 419-432.
3. Дональд Кнут Искусство программирования, том 2. Получисленные методы = The Art of Computer Programming, vol.2. Seminumerical Algorithms. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007. — 832 с..

МУРАВЬИНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ФРАГМЕНТАРНОЙ СТРУКТУРЕ

И.В.Козин, С.И.Полюга

ainc00@gmail.com, veta99@mail.ru

Запорожский национальный университет

Аннотация. Многие массовые дискретные оптимизационные задачи на относятся к разряду трудных и NP-трудных задач [1]. Для этих задач на сегодня неизвестны алгоритмы полиномиальной трудоемкости. К числу таких задач относятся задачи маршрутизации, задачи раскроя и упаковки, задачи теории расписаний и многие другие. Поскольку все эти задачи имеют многочисленные

приложения, на практике для них оправдано применение разного рода метаэвристик. Для многих таких задач доказано наличие фрагментарной структуры. В работе показано, что для оптимизационных задач с фрагментарной структурой может быть предложен универсальный муравьиный алгоритм.

Abstract. Many mass discrete optimization problems on are classified as hard and NP-hard problems [1]. For these tasks today unknown algorithms polynomial complexity. Such tasks include routing tasks, the tasks of cutting and packing problems writings race theory, and many others. Since all of these problems have numerous applications in practice for them justified the use of different kinds of metaheuristics. For many of these tasks proved the existence of a fragmented structure. It is shown that the universal ant algorithm can be proposed for optimization problems with a fragmented structure.

В последние годы интенсивно разрабатывается научное направление Natural Computing – «Природные вычисления», объединяющее математические методы, в которых заложены принципы природных механизмов принятия решений.

К таким методам относятся муравьиные алгоритмы. Автором идеи является Марко Дориго, который в 1992 году в своей диссертации предложил заимствовать описанный природный механизм для решения задач оптимизации [2]. Имитируя поведение колонии муравьев в природе, муравьиные алгоритмы используют многоагентные системы, агенты которых функционируют по крайне простым правилам. Они крайне эффективны при решении сложных комбинаторных задач – таких, например, как задача коммивояжера, первая из решенных с использованием данного типа алгоритмов.

Идея муравьиного алгоритма – моделирование поведения муравьев, связанного с их способностью быстро находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и адаптироваться к изменяющимся условиям, находя новый кратчайший путь. При своём движении муравей метит путь феромоном, и эта информация используется другими муравьями для выбора пути. Это элементарное правило поведения и определяет способность муравьев находить новый путь, если старый оказывается недоступным.

Одной из наиболее известных задач комбинаторной оптимизации, для которой был реализован муравьиный алгоритм

является задача коммивояжера. Эта задача относится к NP-трудным и заключается в нахождении кратчайшего гамильтонова цикла в графе.

Пусть задан граф $G=(V, E)$, ребра которого взвешены весовой функцией $\rho: E \rightarrow R^1$ и $|V|=n$. Занумеруем вершины числами $1, 2, \dots, n$ и обозначим $c_{ij} = \rho(i, j)$ – вес ребра, содержащего вершины i и j . Будем полагать, что если ребро (i, j) отсутствует в исходном графе, то $c_{ij} = \infty$.

Будем рассматривать общий случай, когда $c_{ij} \neq c_{ji}$. Пусть $p_1 = 1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1} = 1$ – номера вершин, записанных в порядке их обхода в гамильтоновом цикле. Задачей коммивояжера называется задача отыскания такого порядка обхода вершин, при котором величина $\sum_{i=1}^n c_{p_i p_{i+1}}$ – минимальная. Формально эта задача минимизации функции

$$\sum_{i=1}^n c_{p_i p_{i+1}} \rightarrow \min ,$$

при ограничениях $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in S_n$, где S_n – множество перестановок из n элементов.

Опишем правила поведения муравьев при выборе пути [3,4]. Муравьи имеют собственную «память». У каждого муравья есть список уже посещенных городов – список запретов. Обозначим $J(i, k)$ список городов, которые необходимо посетить муравью k , находящемуся в городе i .

Муравьи обладают «зрением», обратно пропорциональным длине ребра: $\eta_{ij} = 1/D_{ij}$.

Муравьи обладают «обонянием» – они могут улавливать след феромона, подтверждающий желание муравья пройти по данному

ребру на основании опыта других муравьев. Количество феромона в момент времени t на ребре D_{ij} будет соответствовать $\tau_{ij}(t)$.

Вероятность перехода муравья из вершины i в вершину j определяется следующим соотношением:

$$\begin{cases} P_{ij,k}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}(t)]^\beta}{\sum_{l \in J_{i,k}} [\tau_{il}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{il}(t)]^\beta}, j \in J_{i,k}, \\ P_{ij,k}(t) = 0, j \notin J_{i,k} \end{cases} \quad (1)$$

где α, β – параметры, задающие веса следа феромона. Нетрудно заметить, что данное выражение имеет эффект «колеса рулетки». Количество откладываемого феромона:

$$\Delta \tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, (i, j) \in T_k(t) \\ 0, (i, j) \notin T_k(t) \end{cases}, \quad (2)$$

где Q – параметр, имеющий значение порядка длины оптимального пути, $L_k(t)$ – длина маршрута $T_k(t)$. Испарение феромона определяется следующим выражением:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-p) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta \tau_{ij,k}(t), \quad (3)$$

где m – количество муравьев, p – коэффициент испарения ($0 \leq p \leq 1$).

Алгоритм прекращает работу, когда выполнено некоторое правило остановки, например достигнута граница числа циклов.

В [2] показано, что муравьиный алгоритм достаточно эффективно находит приближенное решение задачи коммивояжера.

Покажем, что муравьиный алгоритм может быть применен практически к любой оптимизационной задаче на фрагментарной структуре.

Для этого рассмотрим обобщенную неаддитивную задачу коммивояжера, в которой длина любого ребра равна 1, а вес приписан каждому маршруту коммивояжера в целом. Определим правила поведения муравьев формулами (1)-(3). Измененный алгоритм может быть применен к любой неаддитивной задаче коммивояжера.

Фрагментарная структура и фрагментарный алгоритм [5,6]

Определение 1. Фрагментарной структурой (Y, E) на конечном множестве Y будем называться семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, такое, что $\forall E_i \in E \ E \neq \emptyset \ \exists e \in E_i : E_i \setminus \{e\} \in E$.

Элементы из множества E будем называть допустимыми фрагментами.

Таким образом, для любого допустимого фрагмента E_i существует нумерация его элементов $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{is_i}\}$, такая, что $\{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}\} \in E$ для всех $k = 1, 2, \dots, s_i$.

Определение 2. Одноэлементные множества, которые являются допустимыми фрагментами, будем называть элементарными фрагментами.

Определение 3. Фрагмент называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого фрагмента.

Теорема 1. Если (Y, E) – фрагментарная структура на множестве Y , то для любого непустого множества $A \in E$ существует нумерация его элементов $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ такая, что для всех $k = \overline{1, m}$ множество $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in E$.

Из теоремы вытекает, что всякий допустимый фрагмент можно построить из пустого множества, последовательно добавляя к нему элементы так, чтобы на каждом шаге такой процедуры полученное подмножество было допустимым фрагментом.

Максимальный фрагмент может быть построен с помощью следующего «жадного» алгоритма:

- элементы множества Y линейно упорядочиваются;
- на начальном шаге выбирается пустое множество $Y_0 = \emptyset$;
- на шаге с номером $k + 1$ выбирается первый по порядку элемент $y \in Y \setminus Y_k$, такой, что $Y_k \cup \{y\} \in E$. Строится множество $Y_{k+1} = Y_k \cup \{y\}$;
- алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $y \in Y \setminus Y_k$ с требуемым свойством.

Приведённый алгоритм будем называть фрагментарным алгоритмом. Результат применения фрагментарного алгоритма определяется заданным линейным порядком на множестве Y . Таким образом, любой максимальный фрагмент может быть задан некоторой перестановкой элементов множества Y .

Пусть каждому допустимому фрагменту $A \in E$ приписан некоторый вес $\rho(A) \in R^1$. Оптимизационной задачей на фрагментарной структуре будем называть задачу поиска допустимого максимального фрагмента максимального веса.

Как уже было отмечено выше задача поиска такого фрагмента сводится к задаче поиска некоторой перестановки элементарных фрагментов. Такая задача, в свою очередь, эквивалентна обобщенной задаче коммивояжера.

Таким образом, муравьиный алгоритм позволяет отыскивать приближенные оптимальные решения практически любой оптимизационной задачи на взвешенной фрагментарной структуре.

Литература.

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи; пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
2. Dorigo M. Optimization, Learning, and Natural Algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politecnico Di Milano, Italy. – 1992.– 140 p.
3. Кажаров, А.А. Об одном «муравьином» алгоритме. / А.А. Кажаров , В.М. Курейчик // Одиннадцатая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным

участием КИИ-2008: Труды конференции. В 3-х т. Т. 3. М.: ЛЕНАНД, 2008. - С. 315-325.

4. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы: теория и применение // Программирование.- №4, 2005, С. 1-16.

5. Козин И.В. Фрагментарные модели для некоторых экстремальных задач на графах / И. В. Козин, С.И. Полюга // Математичні машини і системи. – Київ, 2014. – №1. – С. 143 – 150.

6. . Козин И. В. О свойствах фрагментарных структур / И. В. Козин, С. И. Полюга // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико математичні науки. – 2012. – №1. – С.99 – 106

ПРОБЛЕМА МИНИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА АКСИОМ

Кривцун Е. В.

kryvtsun@ukr.net

Запорожский национальный университет

Аннотация. Исследуется проблема построения эволюционной метаэвристики для задачи поиска минимального множества аксиом. Построена фрагментарная структура этой задачи, что позволило использовать эволюционно-фрагментарную модель для поиска приближенных оптимальных решений. Доказано, что оптимальное решение достижимо в рамках эволюционно-фрагментарной модели. Установлена эффективность предлагаемого метода поиска приближенных оптимальных решений задачи на основе сравнения с другими методами на большой базе тестовых примеров.

Abstract. The problem of constructing of an evolutionary metaheuristics for the “minimum axiom set” searching is investigated. The fragmentary structure of this problem was built. That allowed to use evolutionary-fragmentary model for searching of the approximate optimal solutions. And the optimal solution is achievable within the evolutionary-fragmentary model. The effectiveness of the proposed method for approximate optimal solution search is shown based on a comparison with other methods on a large set of test instances.

Постановка задачи

Рассмотрим множество T истинных предложений s , и множество Z отношений следования

$$R = (A, s), \quad (1)$$

где $A \subseteq T$.

Определение 1. Будем называть *ядром* C любое множество $C \equiv T_0 \subseteq T$, для которого существует такое натуральное ℓ , что $T_\ell = T$, и множество $T_j, j = \overline{1, \ell}$, состоит в точности из таких предложений $s \in T$, что или $s \in T_{j-1}$, или существует $A \subseteq T_{j-1}$, для которого $(A, s) \in Z$.

Задача состоит в отыскании множества всех ядер $\{C_1, \dots, C_K\}$, $1 \leq K \leq 2^n$, $n = |T|$, у которых мощность минимальна, т.е. целевая функция задачи оптимизации выглядит следующим образом:

$$|C_i| \rightarrow \min, \quad i = \overline{1, K}.$$

Соответствующая рассматриваемой задаче задача распознавания является NP-полной [1]. В [2] показано, что к этой задаче сводится NP-полная задача «Точное покрытие 3-множествами (ТП-3)».

Фрагментарная модель задачи

Пусть

$$T = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}, \quad |T| = m, \quad (2)$$

$$Z = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}, \quad |Z| = n. \quad (3)$$

Определим фрагментарную структуру (Z, E) [3], где Z - множество отношений (3). Элементы $R_i, i = \overline{1, n}$, множества Z выберем в качестве элементарных фрагментов. $E = \{E_0, E_1, \dots, E_p\}$ - семейство подмножеств множества Z , являющихся допустимыми фрагментами. Для построения допустимых фрагментов сформулируем рекурсивную процедуру P , которая содержит условия присоединения очередного элементарного фрагмента:

1. На начальном шаге ($r = 0$) выбирается пустое множество $E_0 \equiv \emptyset$.

2. На первом шаге ($r = 1$) к допустимому фрагменту E_0 можно добавить любой элементарный фрагмент $R_i \in Z$ по правилу:

$E_1 = E_0 \cup \{R_i\}$, $T_0 = A_i$, $T_1 = T_0 \cup \{s_{k_i}\}$, где A_i - первый элемент упорядоченной пары (1), s_{k_i} - второй элемент этой пары, индекс текущего последнего элемента фрагментарной структуры $p_r = p_1 = 1$.

3. На r -м шаге, $r = \overline{2, n}$, выбирается любой элементарный фрагмент $R_i, 1 \leq i \leq n$, который еще не участвовал в процедуре, и производится поиск допустимого фрагмента $E_j, 1 \leq j \leq p_r$, к которому будет присоединяться R_i , здесь p_r - наибольший номер допустимого фрагмента на r -м шаге. Поиск осуществляется по следующему правилу: просматриваем множества $T_j, 0 \leq j \leq p_r$, по порядку, начиная с T_0 , и проверяется условие $A_i \subseteq T_j$. Просмотр прекращается, как только условие выполнилось для некоторого T_j . При этом,

– если $0 \leq j \leq p_r - 1$, то выполняем следующие операции:

$$E_j = E_j \cup \{R_i\}, \quad T_{j+u} = T_{j+u} \cup \{s_{k_i}\}, \quad u = \overline{1, p_r - j};$$

– если $j = p_r$, то создаем новый допустимый фрагмент $E_{p_r} = E_{p_r-1} \cup \{R_i\}$, создаем новое множество $T_{p_r+1} = T_{p_r} \cup \{s_{k_i}\}$ и изменяем значение $p_r = p_r + 1$;

– если ни для одного элемента $E_j, j = \overline{1, p_r + 1}$, условие $A_i \subseteq T_j$ не выполнилось, то производим следующие действия:

$$E_1 = E_1 \cup \{R_i\}, \quad T_0 = T_0 \cup A_i, \quad T_u = T_u \cup \{s_{k_i}\}, \quad u = \overline{1, p_r}.$$

Таким образом, всегда имеет место включение

$$T_j \subset T_{j+1}, \quad j = \overline{0, p_r - 1}.$$

Затем переходим к $r+1$ -му шагу, для которого $p_{r+1} = p_r$.

4. Процедура оканчивается при $r = n$, когда все элементы $R_i, i = \overline{1, n}$, множества Z будут включены во фрагментарную структуру, при этом количество допустимых фрагментов равно $p \equiv p_n$.

После выполнения предложенной выше процедуры будет создано семейство множеств $\{T_0, T_1, \dots, T_p\}$. Пусть все предложения из T включены в множество Z , тогда из построения следует, что $T_p = T$. Содержимое и количество p остальных множеств $T_j, j = \overline{0, p-1}$, зависит от порядка выбора элементов $R_i, i = \overline{1, n}$, но, в любом случае, выполняется соотношение

$$|T_0| < |T_1| < \dots < |T_p| = m, \quad (4)$$

т. к. по построению $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_p$.

Таким образом, множество T_0 является ядром, т. е. $T_0 = C_i, 1 \leq i \leq K$. Следовательно, существует такое упорядочение $Z^s, 1 \leq s \leq n!$, элементов $R_i, i = \overline{1, n}$, множества Z , что полученное в результате процедуры P множество T_0^s равно какому-нибудь минимальному множеству C_i , т. е. $T_0^s = C_i, 1 \leq i \leq K$ и $|T_0^s| = |C_i| = \min$.

Если не все истинные предложения из T участвуют в отношениях из Z , то после процедуры P они составят множество $T \setminus T_p$, которое постоянно и не зависит от порядка выбора элементов $R_i, i = \overline{1, n}$. Поэтому, выделив эти предложения один раз, впоследствии их можно исключить из рассмотрения, а на конечном этапе решения задачи получить ядро путем объединения его переменной части T_0 и постоянной части $T \setminus T_p$: $C_i = T_0 \cup T \setminus T_p$. Условие (4) выглядит тогда следующим образом:

$$|T_0| < |T_1| < \dots < |T_p| < m.$$

Можно сформулировать следующий “жадный” алгоритм построения ядра $C_i, 1 \leq i \leq K$:

– элементы множества Z линейно упорядочиваются и нумеруются: (R_1, R_2, \dots, R_n) ;

– выполняется процедура P , в которой для каждого шага $r = \overline{1, n}$ выбирается элемент R_r .

Эволюционно-фрагментарная модель задачи

Эволюционный алгоритм поиска оптимального решения в эволюционной модели строится по следующей стандартной схеме. На начальном этапе случайным образом на множестве допустимых решений выбирается подмножество X_0 – начальная популяция. Элементы множества X_0 упорядочиваются в соответствии со значениями критерия оптимизации. Это множество будет изменяться в процессе выполнения алгоритма. На шаге с номером s формируется множество X_s , – очередная популяция, мощность которой совпадает с мощностью популяции X_0 .

На каждом шаге алгоритма с помощью оператора селекции выбирается множество пар текущей популяции. Проводятся процедуры скрещивания и мутации, и строится множество потомков. Для каждого потомка также вычисляется значение критерия. С помощью оператора отбора на основе вычисленных значений критерия отбора из объединения текущей популяции и множества потомков формируется новая текущая популяция X_{s+1} , которая содержит элементы с наибольшими значениями критерия отбора. Алгоритм заканчивает работу при выполнении условия остановки.

Для задачи минимального множества аксиом в качестве базового множества выберем множество перестановок из n элементов, где n – мощность множества отношений Z . Каждой перестановке соответствует допустимое слово, построенное фрагментарным алгоритмом. Критерием задачи является длина слова. В качестве кроссовера определен геометрический кроссовер на перестановках [3], мутация – произвольная транспозиция двух элементов перестановки. Построенная таким образом эволюционная модель называется эволюционно-фрагментарной моделью задачи.

Возможности эволюционно-фрагментарной модели были протестированы на большой базе специально сгенерированных

тестовых примеров. Сравнение проводилось с известными приближенными алгоритмами (метод случайного поиска, метод локального поиска). Результаты тестирования показали высокую эффективность метода, основанного на эволюционно-фрагментарной модели задачи о минимальном множестве аксиом.

Литература

1 Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 416 с.

2 Pudlak P. Polynomially complete problems in the logic of automated discovery / P. Pudlak // Mathematical Foundations of Computer Science 1975, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 32, Springer, Berlin, 1975. - pp. 358 – 361. – Режим доступа: http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F3-540-07389-2_221#page-1.

3 Козин И. В. Фрагментарные структуры и эволюционные алгоритмы /И.В. Козин// Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. праць ; [ред. кол.: О. М. Кисельова (головний редактор) та ін.]. – Д. : Вид- во Дніпропетр. нац. ун-ту ім. Олеся Гончара, 2008. – С. 138-146.

ТВОРЕЦЬ ПРОГРАМИ ПОЛЬОТУ НА МІСЯЦЬ

Лісковець С.М., Шендеровський В.А.

lisds09@ukr.net

schender@iop.kiev.ua

Луцький національний технічний університет

Інститут фізики НАН України

Анотация: Космонавтика, генетика, спутниковые технологии связи, компьютерные технологии, авиация, экономика, оборонные проекты... всюду ведущими лидерами работают учёные, рождённые в Украине, или их потомки. Диаспора является неотъемлемой частью украинского национального организма, и много выходцев из нашего края стремятся к взаимопониманию и сотрудничеству с родиной своих предков. Про одного из них, известного

учёного в области аэронавтики и астронавтики, талантливому математика Игоря Богачевского и написано в этой научной статье.

Annotation: astronautics, genetics, satellite communication technologies, computer technologies, aviation, economy, defense projects... There are scientists working at leader positions in the world who were born in Ukraine or have Ukrainian ancestors. The Diaspora has been an integral part of the Ukrainian national organism. A lot of Ukrainians by origin are aspiring to mutual understanding and cooperation with the homeland of their ancestors. This scientific article is dedicated to one of them, Igor Bogachevsky, a well-known scientist in the field of aeronautics and astronautics, and a talented mathematician.

Народився Ігор-Орест Богачевський 7 вересня 1928 року у місті Сокалі, яке тоді було у складі Польщі, нині – Львівської області, в родині адвоката Данила Богачевського, автора книги про історію Рави-Руської, та громадської діячки Ростислави Богачевської, з родини Нечаїв.

Родина переїжджала з місця на місце, змушена жити там, де батькові давали роботу. Тому з 1935 до 1939 року родина жила у Раві-Руській, де Ігор навчався у народній школі з польською мовою викладання. З 1939 року родина мешкала у Томашеві, а з 1941 до 1944 року – у Сокалі, де хлопець навчався в українській гімназії. Ігор з дитинства був дещо слабкуватим, ніжним і, як згадує його молодша сестра Марта, був маминим улюбленцем. Слабкуватим довго не довелося бути, адже батько практикував здоровий спосіб життя – руханка, велосипед, лижі, біг. Та доба не сприяла надмірній розніженості: діти гралися у козаків і татарів. Сім'я була щасливою, у родині було троє дітей: Ігор, менша на рік Марія і молодша на десять років за Марію сестра Марта. Проте часи були тривожними для українського люду. Польський уряд проводив дискримінацію українців, а ще страшнішими були загрози від радянського та німецького режимів.

Розпочалася Друга світова війна. Батьків і найменшу донечку помістили у німецький трудовий табір, а Ігоря та чотирнадцятирічну Марію вивезли на ремонтні роботи до Німеччини. Лише через два роки Ігор возз'єднався зі своєю сім'єю завдяки клопотанням Червоного Хреста та наданню допомоги з боку Організації Об'єднаних Націй і програмі реабілітації. Батько,

Данило Богачевський, добре усвідомлював, що чекатиме його родину по закінченні війни в разі перемоги Радянського Союзу. Тож родина вирішила емігрувати. 1944 року вони переїхали до Німеччини, де Ігор вступив до класичної гімназії в Ульмі, до якої приймали дітей українських переміщених осіб.

Як згадує сестра Марта: «... перше був голодний американський табір для молодих «юнаків», потому голодна Ді-Пі таборова гімназія. Для брата Ігоря це було відкриття «великої України» - учителів «звідтам», з Придніпровської України... Він почав дописувати до пластових журналів, займатися спортом і товариством, найшов першу нещасливу любов...».

Одержавши сертифікат про освіту, Ігор вирушив з ріднею до США. 18 квітня 1948 року Богачевські на судні, яке привезло деяких солдатів з Другої світової війни, прибули на захід США, у порт Нью-Йорка.

З 1951 року Ігор два роки перебував у американській армії в Кореї. Був радистом, перехоплював вказівки російських радників, які вони давали північним корейцям, отримавши так докази, що Радянський Союз був безпосереднім учасником конфлікту.

Повернувшись з армії 1953 року, Ігор Богачевський навчається у Нью-Йоркському університеті, спочатку вивчає технічні науки, а з 1956 до 1960 року – математику. Водночас доводилося працювати на різних низькооплачуваних роботах у Стенфорді та Нью-Хейвені, штат Коннектикут, у Нью-Йорку і Філадельфії. Частково сім'ю Богачевських матеріально підтримував і дядько, Костянтин Богачевський, архієпископ Української греко-католицької церкви у Сполучених Штатах. В "Енциклопедії Українознавства" Володимира Кубійовича читаємо: "... Костянтин Богачевський народився 1884 року, родом з Манаєва (Галичина), доктор богослов'я, студював у Львові, Інсбруку, Мюнхені. Свячений 1909 року, сотрудник, префект у Львівській Семинарії, згодом її духовник, совітник і референт Консисторії, військовий курат (1916-17 рр.), віцеректор семинарії, крилошанин перемиський (1918) і катедральний парох, згодом генеральний вікарій, Апостольський Протонотар (1923), титулярний єпископ Амізосу і Апостольський Екзарх для українців у ЗДА (1924),

асистент папського трону і римський граф (1950), титулярний архієпископ Берое (1954). За національну працю був арештований поляками. Підніс американський екзархат з релігійної, освітянської, національної, економічної сторони. Меценат українських інституцій та науки і преси...".

Ігор Богачевський жив сам у Нью-Йорку, у бідній ділянці, влітку працював на будові доріг. Закінчив навчання в університеті з найвищою відзнакою, отримавши ступінь інженера та престижну стипендію національної науки на докторські студії математики у престижному Інституті Куранта Нью-Йоркського університету.

Ріхард Курант (1888 – 1972) – відомий математик (в УРЕ про нього немає згадки), іноземний член АН СРСР (з 1966), народився у Німеччині, з 1934 року у ЗДА, праці з теорії конформних відображень, математичної фізики та диференціальних рівнянь.

У виборі Ігорем Богачевським професії важливу роль відіграло його знайомство з добре знаним у наукових колах Америки математиком Володимиром Петришиним, родом зі Львова. Народжений 1929 року, Володимир прибув до США у 1950 році. У 1961-64 роках він був науковим співробітником Курантського Інституту Нью-Йоркського університету, у 1964-68 роках – доцент, а згодом надзвичайний професор Чикагського університету, з 1968 року – професор Ратгерського університету в Нью-Джерсі, дійсний член НТШ і низки американських наукових товариств, автор понад 40 наукових праць з математики.

У 1960-63 роках Ігор Богачевський почав блискучу кар'єру як математик, асоційований дослідник, асистент-професор (з 1961 року доктор наук) Департаменту аеронавтики та астронавтики Нью-Йоркського університету. Зазначимо, що І. Богачевський, окрім української та польської мов, володів англійською, німецькою та російською мовами. Наступні чотири десятиліття свого життя вчений віддав праці у оборонному комплексі США.

З 1963 до 1966 року Ігор Богачевський працює як дослідник в авіаційній лабораторії Корнелльського університету в Буффало, а з 1966 року до 1968 року – провідним науковим дослідником Авко-Еверет дослідної лабораторії в Евереті. Наступні роки (1968-1975) він працює членом Правління телефонних лабораторій Бел в

Маррей Гілл, а з 1976 до 1987 року – у славетній Національній лабораторії в Лос-Аламосі (штат Нью-Мексико), де створювали американську ядерну зброю.

У 1987 році переходить працювати як провідний науковець технічної групи Відділу ракет корпорації "Роквел Інтернешнл". Наукові дослідження Ігоря Богачевського переважно були спрямовані на розвиток аеронавтики та термоядерної енергетики, створення нових систем зброї, математичне моделювання ядерних ракетних двигунів та удосконалення телефонних мереж. Фактично він працював на перехресті кількох наук, йшов у перших рядах дослідників космосу, поєднував науку з практичним застосуванням нових винаходів. Вивчав проблеми, пов'язані з циркуляцією повітря в атмосфері, розробив метод для проведення обрахунків тривимірного входу у поле потоку, а також обчислювальну схему дослідження гідромеханічних задач та ударного хвильового потоку.

Нині добре знаним є той факт, що NASA користувалося ідеями та розрахунками українського вченого Юрія Кондратюка при розробці програми польоту на Місяць. Саме Ігор Богачевський удосконалив план Кондратюка – вивів формулу, яка дала змогу конструкторам літаків і міжпланетних супутників визначати повітряні потоки навколо цих апаратів під час їхніх польотів. Його математичний винахід названо "Bohachevsky function" – формула, що дозволяє конструкторам міжпланетних кораблів швидко визначати енергетичні струмені в повітрі та космосі. Це зробило можливою реалізацію програми польоту на Місяць й повернення астронавтів на Землю.

Цей проект – реалізація ідеї та розрахунків Юрія Кондратюка – отримав численні нагороди, зокрема премію імені Шевелла (1975) та Сааті (1980) і Е. Брайяна Інституту матеріалів, мінералів і гірничої справи (Великобританія, 1961), відзнаку NASA за розробку для проекту "Аполло", нагороду телефонної компанії ФТТ (??? АТТ).

Зазначимо, що у ділянці ядерної енергетики Ігор Богачевський займався питаннями математичного моделювання термоядерного ракетного пристрою. Секретність робіт, до яких був причетний

вчений не дає змоги нині повною мірою висвітлити конкретні патенти та нагороди, які, звісно, він отримував, адже його наукова діяльність у багатьох важливих проєктах була визначальною. Як свідчить його сестра Марта, його інструментом був аркуш паперу та звичайний олівець (мабуть, аж до того часу, коли було винайдено комп'ютер). Цікаво навести думку самого вченого про те, що треба робити для досягнення успіху: "Щоб бути успішним у житті, треба довести, що ти зумієш зробити людині, яка вже досягла чого-небудь у житті, тоді довіряють і дають усе нові і важчі завдання".

У 1993 році Ігор Богачевський повернувся до Лос-Аламоса, вийшовши у відставку після різноманітної та успішної кар'єри. Автор понад 100 наукових праць у ділянці астронавтики і ядерної фізики.

Про його особисте життя свідчить одна із його сестер – Марта Богачевська-Хом'як – доктор наук, видатна дослідниця жіночого руху, яка закінчила Пенсильванський університет, а згодом аспірантуру у Колумбійському університеті. У 1964-68 роках вона була викладачем, професором історії в університетах Нью-Йорка, Нью-Джерсі, Вашингтона та Гарварда. Вела дослідницьку роботу у Національному фонді сприяння гуманітарним наукам у Вашингтоні, автор відомого дослідження історії українського руху 1884-1939 рр.. Її книга "Білим по білому" вийшла 1988 року англійською мовою у Канаді, а 1995 року – українською мовою у Києві. За неї Марта Богачевська отримала премію ім. Барбари Гелд Асоціації славісток США та премію ім. Тетяни й Омеляна Антоничів...

За її словами, з дитинства Ігоря цікавила історія, особливо часів козаччини, в університеті зацікавився модерним мистецтвом, а ще цікавився розвитком релігії і був віруючою людиною. Ніколи не забував свою Батьківщину – Україну. Мріяв повернутися додому і стати завідувачем кафедри фізики у Львівському університеті. Наприкінці життя побував у Києві, брав участь у з'їзді математиків. Друкував популярні статті в українських виданнях Львова та Києва.

Особисте життя у Ігоря Богачевського не склалося. Він одружився 1969 року, став чудовим батьком єдиної донечки Соні, яка померла від раку мозку у 1980 році. Їй було лише дев'ять років. Після смерті доньки подружжя розпалося. Вдруге не вважав за відповідне одружуватися.

Ігор Богачевський був спортсменом, насолоджувався спортом: у молодості легкоатлетичними видами спорту, пізніше – тенісом і гірськими лижами. Пристрасно любив гори і на схилі літ марив Карпатами.

Був прихильником місцевої газети у Лос-Аламосі, часто писав для неї; у юності Ігор Богачевський писав статті українською мовою до українських часописів у Сполучених Штатах. Любив Шевченка, часто цитував та й наспівував його твори. Жив дуже скромно, милувався видом на гори Нью-Мексико зі свого балкону. В останні роки свого життя він рідко залишав свій будинок, хіба лише о 6 вечора щосуботи для участі у месі в Святого Серця Марії католицької церкви.

Відійшов у вічність 4 лютого 2010 року серед своїх драматичних гір. Похований на кладовищі в Баунд-Брук, Нью-Джерсі, поруч з могилою своєї дочки.

Література:

1. Абліцов Віталій. Вчені України – лауреати міжнародних премій і нагород. – К.: "Академперіодика". – 2011. – 192 с.
2. Царин В. Видатний вчений США народився в Сокалі. // газета "Голос з-над Бугу". – Сокаль. – 2008.
3. Богачевська-Хом'як Марта. Ігор-Орест Богачевський (неопублікована інформація).
4. Енциклопедія Українознавства. / Гол. ред. проф. д-р Володимир Кубійович. – Париж – Нью-Йорк: "Молоде життя". – 1955. – Т. 1. С. 143.
5. Сокальська гімназія. / Під ред. чл.-кор. НАНУ Олега Романіва. – Львів: НТШ. – 2001.

АНАЛІЗ СТРУКТУРИ СОЦІАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ З ТОЧКИ ЗОРУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

Мелешко Є.В., канд. техн. наук, доцент,
elismeleshko@gmail.com

*Кіровоградський національний технічний університет,
м. Кіровоград*

На сьогоднішній день в зв'язку з великим поширенням віртуальних соціальних мереж і розвитком технологій інформаційного впливу та інформаційних війн, актуальною є задача дослідження методів аналізу соціальних мереж, методів інформаційного впливу на їх користувачів та розробки методів протидії шкідливим інформаційним впливам.

В соціальній мережі агенти часто не мають достатньої для прийняття рішення інформації, або не можуть самостійно обробити її, тому їх рішення можуть бути засновані на рішеннях інших агентів – соціальний вплив. Соціальний вплив реалізується в двох процесах: *комунікації* (під час спілкування з авторитетними для агента користувачами мережі) та *порівнянні* (в пошуках своєї ідентичності агент порівнює себе з іншими агентами, що займають ті ж позиції в соціальній мережі та приймає рішення (погляди) – копіює поведінку, що зроблять його більш популярним та привабливим для спілкування) [1].

Вплив на агентів у соціальній мережі буває *цілеспрямованим* (використовується для переконання та навіювання, наприклад, в політичних чи маркетингових цілях) та *нецілеспрямованим* (індивід не ставить мети отримати певні результати від об'єкта впливу, а інколи може і не знати про існування свого впливу на агента) [1].

Для аналізу соціальних мереж найбільш часто використовуються теорія графів та теорія ігор. Окремо варто виділити теорію мережних ігор (або ігор формування мереж) – розділ теорії ігор, що акцентує увагу на формуванні мережних структур – стійких зв'язків між гравцями – в умовах неспівпадіння інтересів і/або різної інформованості останніх.

Ігри на соціальних мережах – ігри, в яких вершинами являються агенти – учасники соціальної мережі, а зважені дуги

відображають ступень їх "довіри" один до одного або впливу один на одного. Також в даній моделі існують гравці, що здатні впливати на агентів з врахуванням їх довіри один до одного, вони здатні здійснювати цілеспрямований вплив на агентів.

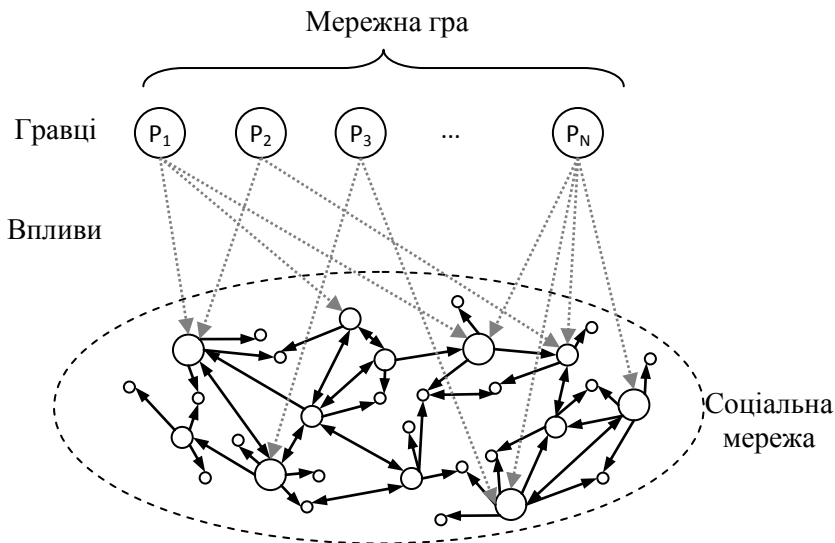


Рис. 1 – Модель інформаційного протиборства у соціальній мережі

Неконтрольований вплив гравців на користувачів соціальної мережі може призвести до виникнення загроз інформаційній безпеці окремої особистості, спільноти або держави.

Види загроз інформаційній безпеці в соціальних мережах:

- порушення конфіденційності інформації;
- розповсюдження неякісної інформації (недостовірної, дезінформації, пропаганди);
- інформаційно-психологічний вплив на окремих користувачів, певні групи користувачів, лідерів думок.

Окремо слід виділити види загроз національній безпеці держави в соціальних мережах [2]:

1) у зовнішньополітичній сфері:

- поширення у світовому інформаційному просторі

викривленої, недостовірної та упередженої інформації, що завдає шкоди національним інтересам держави;

- зовнішні негативні інформаційні впливи на суспільну свідомість;

2) у сфері державної безпеки:

- негативні інформаційні впливи, спрямовані на підрив конституційного ладу, суверенітету, територіальної цілісності і недоторканності кордонів держави;

- пропаганда сепаратизму за етнічною, мовною, релігійною та іншими ознаками.

Існують наступні моделі впливу у соціальних мережах [1]:

1. *Оптимізаційні та імітаційні моделі*: моделі з порогоми; моделі незалежних каскадів; моделі просочування та ураження; моделі Ізінга; моделі на основі клітинних автоматів; моделі на основі мереж Маркова;

2. *Теоретико-ігрові моделі*: моделі взаємної інформованості; моделі погоджених колективних дій; моделі комунікацій; моделі стабільності мережі; моделі інформаційного впливу та управління; моделі інформаційного протистояння.

Види структурного аналізу соціальних мереж [3]:

- *соціоцентричний підхід* – направлений на виявлення структурних характеристик системи;

- *егоцентричний підхід* – направлений на виявлення кореляцій між структурними характеристиками соціальних акторів та їх особистими характеристиками.

Представники егоцентричного підходу вивчають не один вид зв'язків між усіма членами мережі, а всі зв'язки, які має певний член мережі.

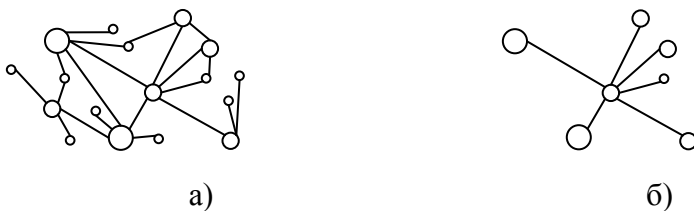


Рис. 2 – Графи соціальних мереж: а) соціоцентричний підхід; б) егоцентричний підхід

Аналіз соціальних мереж дозволяє виявити різні їхні характеристики, основні з них [3]:

- *Щільність* - відношення кількості зв'язків до загальної кількості акторів мережі. Є мірою швидкості, з якою інформація може поширюватися по мережі (чим більше зв'язків в мережі, тим вище швидкість);

- *Визначення ступеня вершини*. Учасники мережі, що володіють найбільшою кількістю зв'язків, є найбільш впливовими;

- *Середня відстань як міра близькості акторів один до одного* (тобто, за скільки в середньому кроків один член мережі може зв'язатися з іншим). Центральним за даним показником буде вважатися той актор, для якого відстань до інших вершин мінімальна. Оскільки шлях від центральних вузлів до решти є найбільш простим, вони мають велику ймовірність отримання інформації, що циркулює в мережі, а значить, можуть контролювати поширення цієї інформації.

- *Визначення ступеня проміжків*. Проміжок (посередництво) – це ступінь включеності об'єкта в маршрути зв'язку між іншими учасниками мережі.

За допомогою структурного аналізу можна виявити слабкі місця соціальної мережі, що можуть потенційно бути використані супротивником для здійснення шкідливих інформаційних впливів.

Список літератури

1. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства / Под ред. чл.-корр. РАН Д.А. Новикова. – 2-е изд., стереотипное. – М.: Издательство физико-математической литературы: МЦНМО, 2010. – 228 с.

2. Пелешишин А.М. Загрози інформаційної безпеки держави в соціальних мережах / А.М. Пелешишин, Р.В. Гумінський // Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. – 2013. – № 2. – С. 192-199.

3. Воронкин А.С. Социальные сети: эволюция, структура, анализ [Электронный ресурс] // Образовательные технологии и

ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ПІДТРИМАННЯ ДІЄЗДАТНОСТІ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

Минайленко Р.М., к.т.н., доцент

Михайлов С.В., інженер

*Кіровоградський національний технічний університет,
м. Кіровоград*

У сучасному виробництві застосовуються системи автоматизованого керування підприємством (бухгалтерія, склади, оперативне планування) для таких систем важлива надійність і швидкість обробки даних. Існує чимало засобів побудувати надійну систему. Дискові масиви RAID, наприклад, дозволяють не переривати обробку запитів до інформації, що зберігається на дисках, при виході з ладу одного або декількох елементів масиву. Не бракує технологій, що гарантують надмірність інших підсистем серверу. Так, резервні блоки живлення дозволять скорегувати відмову цієї компоненти. Джерела безперебійного живлення підтримають працездатність системи у випадку збоїв у мережі енергопостачання. Багатопроцесорні материнські плати забезпечать функціонування серверу у випадку відмови процесора.

Проте жодний із цих варіантів не врятує, якщо з ладу вийде вся обчислювальна система цілком. Саме у цьому випадку на допомогу приходить кластеризація. Першим кроком до створення кластерів можна вважати широко поширені в пору розквіту міні-комп'ютерів системи "гарячого резерву". За цією технологією в мережі з декількох серверів один або два не виконують ніякої корисної роботи, але готові почати функціонувати, як тільки вийде з ладу яка-небудь основна система.

Найпростіший варіант кластеризації це - віддзеркалення, коли один із мережних серверів виступає в ролі "дзеркала" для іншого.

На "дзеркальному" сервері встановлене те ж саме програмне забезпечення, що і на основному, синхронізація програмного забезпечення підтримується шляхом передач даних по комунікаційному каналу, що з'єднує сервери в кластері (синхронізація серверів). Збір виявляє "дзеркало" і ініціює виконання програми на ньому, при цьому всі запити опрацьовуються точно так само, як і на основному сервері, за рахунок синхронізації роботи серверів. Таку конфігурацію кластера називають "активний/резервний".

Так само існує конфігурація "активний/активний" - це два сервери, що підмінюють один одного у випадку збою. Наприклад, Web-сервер і сервер додатків в одній мережі можуть виконувати функції "дзеркала" один для іншого. Якщо вийде з ладу Web-сервер, його функції візьме на себе сервер додатків і навпаки. Деякі програмні рішення навіть дозволяють будь-якому комп'ютеру в мережі виступати в якості "дзеркала" для будь-якої іншої машини в тій самій мережі. За такою логікою підмінити Web-сервер зможе, наприклад, високопродуктивна робоча станція користувача, або ж група таких станцій, між якими буде розподілене все обчислювальне навантаження. З погляду користувачів основний і дзеркальний сервер - це єдина система, користувачі не знають і не можуть дізнатися, який із серверів на даний момент обслуговує його запити.

Перед кластерами поставлені дві задачі: потужні обчислення і підтримка розподілених баз даних з високим рівнем готовності, особливо таких, для яких потрібна підвищена надійність.

Висновки. Можливість кластерної технології дозволяє насамперед побудувати унікальну архітектуру, що має достатню продуктивність, стійкість до відмов апаратури або програмного забезпечення і при цьому легко нарощується і модернізується, але універсальними засобами, зі стандартних компонентів і за помірну ціну (незрівнянно нижчу, ніж ціна унікального стійкого до збоїв комп'ютера або системи з масовим паралелізмом).

Список літератури

1. Воеводин Вл.В., Жуматий С.А. "Вычислительное дело и кластерные системы".-М.: Изд-во МГУ, 2007. - 150 с.
2. Цилькер Б.Я. Организация ЭВМ и систем : Учебник для вузов / Б.Я. Цилькер, С.А. Орлов. - 2-е изд. - СПб.: Питер, 2011. - 688 с. - ISBN 978-5-49807-862-5.
3. "Oracle Database 10gReal Application Clusters Handbook Implements Flexible, Scalable, High Availability Database Solutions" by K Gopalakrishnan, Senior Principal Consultant Oracle Corporation. 2007 McGraw-hill Companies, Inc., 421p.

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ИЗ ОБЪЕДИНЕНИЯ СЕМЕЙСТВ M И U

Нагорный А. С.

e – mail: anagorny@list.ru

*Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова*

*Московский физико-технический институт (государственный
университет)*

Аннотация. Пусть P_4 есть множество всех конечноместных 4-значных функций. Пусть также $M(4)$ есть семейство всех классов функций из P_4 , монотонных относительно ограниченных частичных порядков, а $U(4)$ есть семейство всех классов функций из P_4 , сохраняющих нетривиальные разбиения множества $\{0,1,2,3\}$. Известно, что все такие классы являются замкнутыми и предполными в P_4 . В работе построена решетка пересечений для классов из объединения семейств $M(4)$ и $U(4)$.

Abstract. Let P_4 be a set of all 4-valued functions and let $M(4)$ be a set of all clones in P_4 which are monotone with respect to limited partial orders, and let $U(4)$ be a set of all clones in P_4 which preserve some non-trivial partitions of the set

$\{0,1,2,3\}$. It is known that all these clones are precomplete in P_4 . The lattice of intersections for clones of union of $M(4)$ and $U(4)$ is constructed.

Пусть k — натуральное число, $k \geq 2$, $E_k = \{0,1,\dots,k-1\}$, P_k — множество всех конечноместных функций на E_k . Элементы множества P_k будем называть k -значными функциями.

Определения используемых ниже операции суперпозиции, понятий замыкания и замкнутого класса можно найти в [1, §§2-7].

Определение 1. Замкнутый (относительно суперпозиции) класс H функций из P_k назовем *предполным* в P_k , если $H \neq P_k$, но для любой k -значной функции f , не принадлежащей классу H , замыкание множества $H \cup \{f\}$ совпадает с P_k .

Известно, что при каждом $k \geq 2$ классы k -значных функций, монотонных относительно ограниченных частичных порядков) и для любого $k \geq 3$ классы k -значных функций, сохраняющих нетривиальные разбиения множества, являются замкнутыми и предполными в P_k [2, 3]. Обозначим семейство всех таких классов через $M(k)$ и $U(k)$, соответственно. Как мы увидим позже, имеется ровно 18 классов в семействе $M(4)$ и 13 классов в семействе $U(4)$.

Рассмотрим всевозможные пересечения классов из объединения $M(4)$ и $U(4)$. Ясно, что такие (попарно различные как классы функций) пересечения образуют нижнюю полурешетку (по вложению), т. н. *решетку пересечений* $(M \cup U)^4$, максимальными элементами которой являются сами предполные классы из объединения $M(4)$ и $U(4)$, а в роли наименьшего элемента выступает класс, содержащий только константы и селекторные функции.

Отметим, что для семейств $M(4)$ и $U(4)$ по отдельности решетки пересечений были построены автором ранее в работах [4] и [5], соответственно.

Легко видеть, что объединение $M(3)$ и $U(3)$ состоит из 6 классов, и элементами решетки $(M \cup U)^3$ являются 34 пересечения (это следует, например, из результатов,

опубликованных автором в [6]). Однако, уже при $k = 4$ решетку $(M \cup U)^k$ построить существенно сложнее, поскольку многие из пересечений классов из $(M \cup U)^4$ равны как множества функций.

Целью данной работы является построение решетки $(M \cup U)^4$.

Обозначим через M_{abcd} и $M_{a\{bc\}d}$ классы четырехзначных функций, монотонных относительно частичных порядков $(a \prec b \prec c \prec d)$ и $(a \prec b, c \prec d)$, соответственно. Легко видеть, что семейство $M(4)$ состоит из 12 классов первого типа и 6 классов второго типа.

Обозначим также через $U_{a\{bcd\}}$, $U_{\{ab\}\{cd\}}$ и $U_{ab\{cd\}}$ классы четырехзначных функций, сохраняющих разбиения $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ и $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$ множества E_4 , соответственно. Легко видеть, что имеется 4 класса первого типа, 3 класса второго типа и 6 классов третьего типа. Других классов семейство $U(4)$, очевидно, не содержит.

Пусть класс K является пересечением некоторых предполных в P_4 классов из объединения $M(4)$ и $U(4)$.

Определение 2. Каноническим видом класса K (относительно объединения семейств $M(4)$ и $U(4)$) назовем множество $\chi(K)$ тех и только тех предполных классов из $M(4)$ и $U(4)$, в которых K содержится целиком. Ясно, что задача построения решетки $(M \cup U)^4$ эквивалентна задаче нахождения всех возможных канонических видов пересечений классов из объединения $M(4)$ и $U(4)$.

Определение 3. Пусть π — произвольная перестановка на E_4 , f — четырехзначная функция, зависящая от n переменных. Функцию $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \pi(x_2), \dots, \pi(x_n)))$ назовем двойственной к функции f относительно перестановки π .

Определение 4. Классы функций K_1 и K_2 ($K_1, K_2 \subseteq P_4$) назовем двойственными (друг другу), если существует перестановка π на множестве E_4 такая, что класс K_2 состоит из

всех функций, двойственных функциям из K_1 относительно π , и только из них.

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 1. *Решетку пересечений $(M \cup U)^4$ образуют в точности 5564 попарно различных классов — пересечений предполных классов из объединения $M(4)$ и $U(4)$, из них ровно 261 классов являются попарно недвойственными. Полный список всех таких попарно недвойственных классов (каждый класс задан каноническим видом), с указанием кратности $n(K)$ (т. е. числа двойственных классов) приведен в [7].*

Результат, сформулированный в теореме 1, получен на основе анализа свойств о вложении некоторых пересечений классов из объединения $M(4)$ и $U(4)$ в другие классы (также из объединения $M(4)$ и $U(4)$). Все необходимые свойства такого рода предварительно были получены автором в диссертационном исследовании [8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00593-а).

Литература

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику — М.: Наука, 1986. — 384 с.
2. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — 1960. — №3. С. 49–60.
3. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
4. Нагорный А. С. О пересечениях классов монотонных функций многозначной логики // XI международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», (Москва, 18-23 июня 2012 г.). М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, С. 207-209.
5. Нагорный А. С. О пересечениях предполных классов четырехзначных функций, сохраняющих разбиения // Материалы

XVII Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их применения (17-18 апреля 2015 г.). Кировоград: Изд-во «Эксклюзив-Систем», 2015, С. 78-80.

6. Нагорный А. С. О распределении трехзначных функций по предполным классам // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2012. №3. С. 45–52.

7. Нагорный А. С. Абдрашитова А. Р. Решетка предполных классов из семейств M и U в четырехзначной логике. (<https://goo.gl/aoi3Qo>)

8. Нагорный А. С. О пересечениях и объединениях предполных классов многозначной логики : дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.09 : защищена 07.06.13 : утв. 21.10.13 / Нагорный Александр Степанович. Москва, 2013. 162 с. Библиогр. : С. 158–162.

СТРУКТУРА НЕПРОЕКТИВНИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ

Петренюк В. І., Гермак В.С.

Кіровоградський національний технічний університет

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій проективної площини, тобто графів неорієнтовного роду 2, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення по підмножинам множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) графу гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи вершини) та квазізірки Y із центральним графом M гомеоморфним або K_4 чи $K_{2,3}$ та можливим стисканням в точку деяких висячих ребер множини $Y^1 \setminus M^1$). **Основний результат** - теорема про подання довільної граф-обструкції неорієнтовного роду 2 як φ -образу двох зв'язних графів X, Y , які задовольняють одному з наступних випадків: 0) графи X, Y гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, і їхні множини точок приєднання мають число досяжності 1,

1) графи-квазіірки X, Y із центрами гомеоморфними K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо висячими ребрами, і множинами точок приєднання з числом досяжності 2, 2) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проективної площини Σ , а інший граф X є площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y , 3) графи X, Y є вкладеними до проективної площини графами-квазіірками з центром $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$, можливо з висячими ребрами, і множиною точок приєднання графа X до графа Y із числом досяжності 2 та множини точок приєднання графа Y , що належать двом різним простим циклам.

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то через Σ . Визначення 1,2 із [3],[4], відповідно.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$ та назовемо множиною перешкод (obstructions) для графів, що мають укладатися на заданій поверхні S .

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Якщо S проєктивна площина, то Γ_S складається із 103-х графів, діаграми яких наведені в [5], де повнота списку є доведеною, а в [6] вони зображені інакше.

Розглянемо **задачу** вивчення структурних властивостей двозв'язних графів-обструкцій та двозв'язних мінорів для проєктивної площини, поданих як ϕ -образи деякого простого графа та квазізірки, із подальшим використанням при побудові графів-обструкцій для довільної неорієнтованої поверхні. Наведемо короткий огляд результатів робіт, пов'язаних із цією задачею. Для проєктивної площини S були наступні два напрямки робіт пов'язаних з графами, що неприводяться над S . Один з них – “метод релятивних компонент” був заснований Вагнером (Wagner K.), який визначив мінімальний базис для множини скінчених графів, що не можуть бути вкладеними до S і застосував для опису мінімальних графів над проєктивною площиною. Разом з Бодендіком (Bodendiek R.) були продовжені дослідження і знайдені мінімальні графи над тором, зокрема мінімальний базис з 12 графів для множини всіх скінчених графів-обструкцій проєктивної площини був побудований шляхом чотирьох спеціальних перетворень [7] множин вершин і ребер графів та наведений в [8], де вони описані разом із методом релятивних компонент, яким отримано клас графів-обструкцій для пляшки Клейна.

Твердження 1. Для проєктивної площини S мають місце наступні співвідношення:

1) Множина F_S всіх мінорів (мінімальних графів) над проєктивною площиною S складається із 35 графів на рис.2. 2) $F_S \cap F_{\Omega_1} \supseteq \{A_1, A_5, C_1, C_{11}, E_1, E_{42}\}$, де F_{Ω_1} множина всіх мінімальних графів над тором Ω_1 , частково наведена в [13].

Твердження 2. Для проєктивної площини S мають місце наступні властивості:

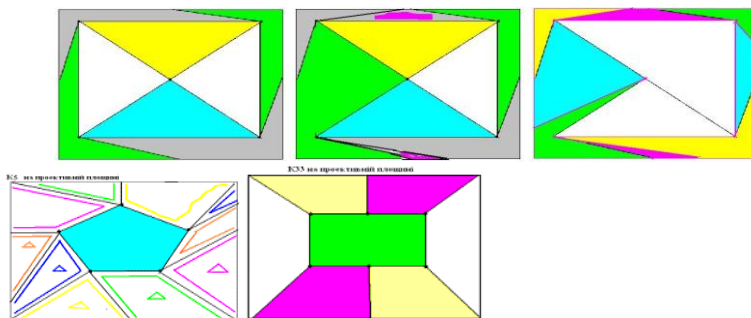
1) Граф $K_{2,3}$ вкладається трикомпонентно (три псевдоклітки) до проєктивної площини S , має множину всіх точок з числом досяжності 2 та має двосторонній доступ до множини вершин;

2) Граф K_4 вкладається трикомпонентно до проективної площини S , має досяжною множини всіх вершин, має множини всіх точок з числом досяжності 2 та має двосторонній доступ до множини вершин, яка має кратність доступу 3;

3) Граф $K_{3,3}$ вкладається чотирикомпонентно (2-клітка та три псевдоклітки) до проективної площини S та має досяжною множини всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 3, причому жодна пара точок не має числа досяжності 2;

4) Граф K_5 вкладається шестикомпонентно (2-клітка та 5 псевдокліток) до проективної площини S та має досяжною множини всіх вершин, а множина всіх точок має число досяжності 4, причому жодна пара точок не має числа досяжності 2.

Доведення твердження 2 випливатиме з вкладень в проективну площину графів K_5 , $K_{3,3}$, K_4 , $K_{2,3}$, наведених на рис.3, де вкладення в проективну площину (зліва направо) наступних графів: K_5 на чотирьох перших різних за кількістю 2-кліток та єдине для $K_{3,3}$, а K_4 на першому, другому, третьому в середньому ряду, потім наведено вкладення $K_{2,3}$. Останні два вкладення графів K_5 та $K_{3,3}$ до пляшки Клейна, відповідно.



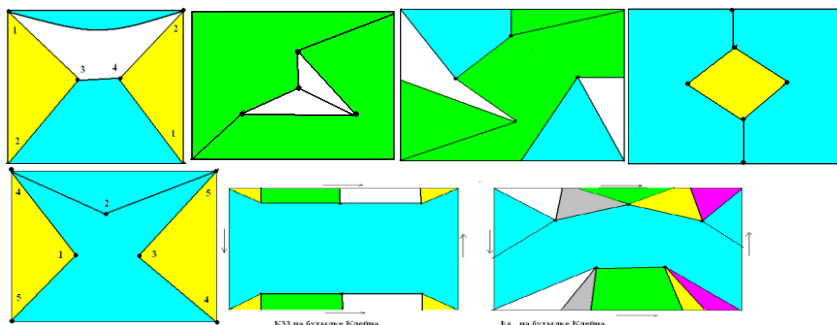


Рис 3. До співвідношень твердження 2.

Твердження 3. Для графів A_2 , B_1 , B_3 , C_7 , D_8 , D_{12} мінімального базису проективної площини P маємо ф-перетворення задані наступними співвідношеннями (за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі у графі-ф-образі):

$$1) \varphi(K_5 - (2', 4') + St_M(K_5 - (2'', 4'')), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (A_2, \{i\}_{i=1}^5), \text{ де}$$

$St_M(K_5 - (2'', 4''))$ є квазізіркою з центром-графом $K_5 - (2'', 4'')$ та двома висячими ребрами $(1'', 6)$, $(5'', 7)$, $M = \{1'', 5''\}$, як це показано на рис. 3.1;

$$2) \varphi(K_5 + (K_5 - (2'', 4'')), \sum_{i=2}^4 (i' + i'')) \rightarrow (B_1, \{i\}_{i=2}^4);$$

$$3) \varphi(K_5 - (2', 1') + (K_5 - (2'', 1'')), \sum_{i=1}^2 (i' + i'')) \rightarrow (B_3, \{i\}_{i=1}^2), \text{ як це}$$

показано на рис. 3.1;

$$4) \varphi(St_{M_1}(K_4) + St_{M_2}(K_4), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (C_7, \{i\}_{i=1}^5), \text{ де } St_{M_i}(K_4)$$

є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M_i , $i=1, 2$, $M_1 = \{(3', 5')\}$, $M_2 = \{(1'', 7), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 8)\}$, як це показано на рис. 3.2;

$$5) \varphi(St_{M_1}(K_{2,3}) + St_{M_2}(K_{2,3}), \sum_{i=1}^6 (i' + i'')) \rightarrow (D_8, \{i\}_{i=1}^6), \text{ де}$$

$St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M_i висячих ребер, $i=1,2$, $M_1 = \{(1',10), (2',10), (3',9)\}$, $M_2 = \{(4'',8), (5'',8), (6'',8)\}$, як це показано на рис. 3.2;

б) $\phi(K_{3,3} + St_M(K_4), \sum_{i=1}^4 (i' + i'')) \rightarrow (D_{12}, \{i\}_{i=1}^4)$, де $St_M(K_4)$ - квазізірка з центром-графом K_4 та двома висячими ребрами із множини M , $M = \{(1'',5), (2'',8)\}$;

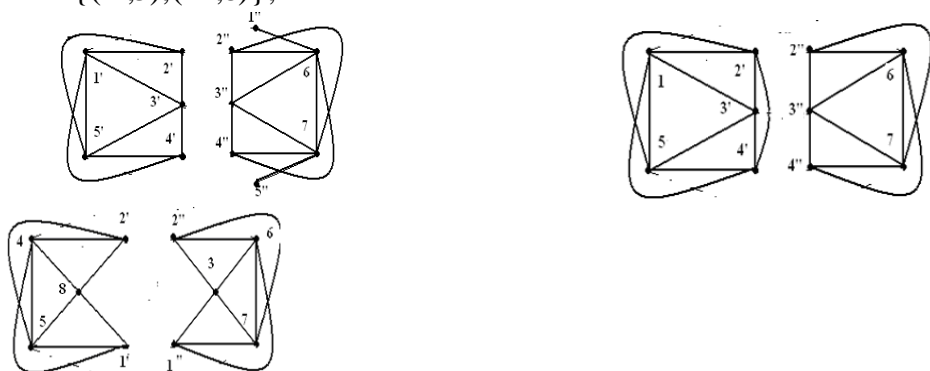


Рис. 3.1. Зліва-направо, перші два графи для ϕ -перетворення на граф A_2 , наступні два графи для B_1 , а останні два для B_3 .

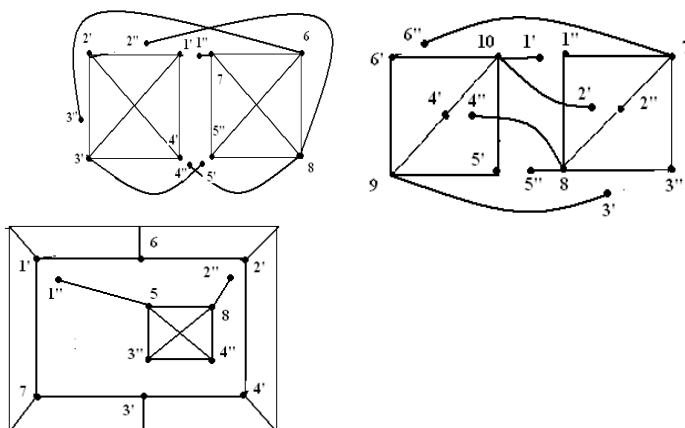


Рис. 3.2. Зліва-направо, перші два графи для ϕ -перетворення на граф C_7 , наступні два графи для D_8 , а останній для D_{12} .

Доведення. Доведемо співвідношення 1) твердження 3. Виконаємо ϕ -перетворення площинного графа $K_5 - e$, де $e = (2', 4')$, та площинного графа квазізірки $St_M(K_5 - (2'', 4''))$ із центром-графом $K_5 - (2'', 4'')$ та двома висячими ребрами $(1'', 6)$, $(5'', 7)$, $M = \{1'', 5''\}$, на граф A_2 шляхом ототождження кожної пари (i', i'') вершин графа $G_1 = K_5 - e$, та $G_2 = St_M(K_5 - (2'', 4'')) \setminus \{(1'', 6), (5'', 7)\}$ на вершину i графа A_2 , де $i = 1(1)5$, як наведено на рис. 3.1. Для цього розглянемо вкладення що наведені на рис.2. Матимемо розміщення на ∂s , $s \in P \setminus f_1(G_1)$, границі клітки (псевдоклітки) множини вершин $\{i'\}_1^5$ та кінцевих точок ребра e , тобто $t_{G_1}(\{i'\}_1^5, P) = 1$ -досяжність на P множини. До цієї s вкладемо за допомогою f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$ граф G_2 та визначимо, що $t_{G_2}(\{2'', 4''\})$ - число досяжності на P множини $\{2'', 4''\}$ дорівнює 2. Таким же є число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5)$ на P та всієї множини точок приєднання графа $f_2(G_2)$ до $f_1(G_1)$. Отримаємо нерівність $\gamma(A_2) \geq 2$. Визначимо ребро u графа G_2 , яке не вкладається до s , бо кінцеві вершини його мають число досяжності 2. З метою досяжності множини $f_2(\{i''\}_1^5)$ звуємо вкладення $f_2' = f_2|_{G_2 \setminus u}$ та приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, на границях яких розташована пара вершин ∂u , вважатимемо, що $\partial u = \{6, 7\}$, де $(1'', 6)$, $(5'', 7)$ висячі ребра квазізірки $f_2'(G_2 \setminus u)$. Для цього ототожнимо із збереженням напрямку пару різнонаправлених стрілок із цих кліток s', s'' та вкладемо на цю ленту ребро $f(u)$ разом із $f(1'', 6)$, а $f(5'', 7)$ розмістимо в s' . Отримаємо таким чином вкладення $f: A_2 \rightarrow S_2$ графа A_2 до пляшки Клейна, причому $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, тобто $\gamma(A_2) \leq 2$. Співвідношення 1) доведено.

Доведемо співвідношення 2) твердження 2. Позначимо через

G_1 граф K_5 , а через G_2 граф $K_5 - (2'', 4'')$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із чотирьох неізоморфних вкладень графа K_5 , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{2'', 1''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ф-перетворення по двом парам $(2', 1')$ та $(2'', 1'')$, матимемо нерівність $\gamma(B_1) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проєктивної площини на якій множина $f_2(\{2'', 3'', 4''\})$ є досяжною, $f_2(\{2'', 3'', 4''\}) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=2}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=2}^4$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: B_1 \rightarrow S_2$ графа B_1 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(B_1) \leq 2$. Таким чином $\gamma(B_1) = 2$.

Співвідношення 2) доведено.

Доведемо співвідношення 3) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_5 - (2', 1')$, а через G_2 граф $K_5 - (2'', 1'')$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проєктивної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із чотирьох неізоморфних вкладень графа K_5 , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{2'', 1''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на

границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(B_3) \geq 2$.

Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{2'', 1''\})$ є досяжною, $f_2(\{2'', 1''\}) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=2}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=2}^4$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: B_3 \rightarrow S_2$ графа B_3 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(B_3) \leq 2$. Таким чином $\gamma(B_3) = 2$.

Співвідношення 3) доведено.

Доведемо співвідношення 4) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_4)$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_4)$, де $St_{M_i}(K_4)$ є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M_i , $i=1,2$, $M_1 = \{(3', 5)\}$, $M_2 = \{(1'', 7), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин M_1 розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із трьох неізоморфних вкладень графа K_4 до P , де $s \in P \setminus \overline{f_1(G_1)}$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(M_2) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(C_7) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих

кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^5)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^5) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^5$ та вклавши всі висячі ребра з $M_2 = \{(1'', 7), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 8)\}$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: C_7 \rightarrow S_2$ графа C_7 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(C_7) \leq 2$. Таким чином $\gamma(C_7) = 2$. Співвідношення 4) доведено.

Доведемо співвідношення 5) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_{2,3})$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_{2,3})$, де $St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та висячими ребрами з множини M_i , $i=1, 2$, $M_1 = \{(1', 10), (2', 10), (3', 9)\}$, $M_2 = \{(4'', 8), (5'', 8), (6'', 8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин $\{1', 2', 3'\}$ розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного із трьох неізоморфних вкладень графа $K_{2,3}$ до P , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{4'', 5'', 6''\}) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(D_8) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^5)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^6) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши

зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^6 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^6$ і вклавши всячі ребра з $\{(4'',8), (1'',10)\}$ на приклеєну ленту. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f : D_8 \rightarrow S_2$ графа C_7 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_8) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_8) = 2$. Співвідношення 5) доведено.

Доведемо співвідношення 6) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $St_M(K_4)$, який є квазізіркою з центром-графом K_4 та всячими ребрами з множини M , $M = \{(2'',8), (1'',5)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2 : G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як звуження одного неізоморфного вкладення графа $K_{3,3}$ до P , де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^4) = 2$, бо клітка s , $s = \bar{s} \setminus \partial s$, є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$ кліток s', s'' , причому $\partial s \cap (\partial s' \cup \partial s'') = \emptyset$. Тому, виконавши ф-перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(D_{12}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1,3,4}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^4$ і вклавши всяче ребро $f_2'(2'',8)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(2', 2'')$ на 2. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$,

$f: D_{12} \rightarrow S_2$ графа D_{12} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_{12}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_{12}) = 2$. Співвідношення 6) доведено.

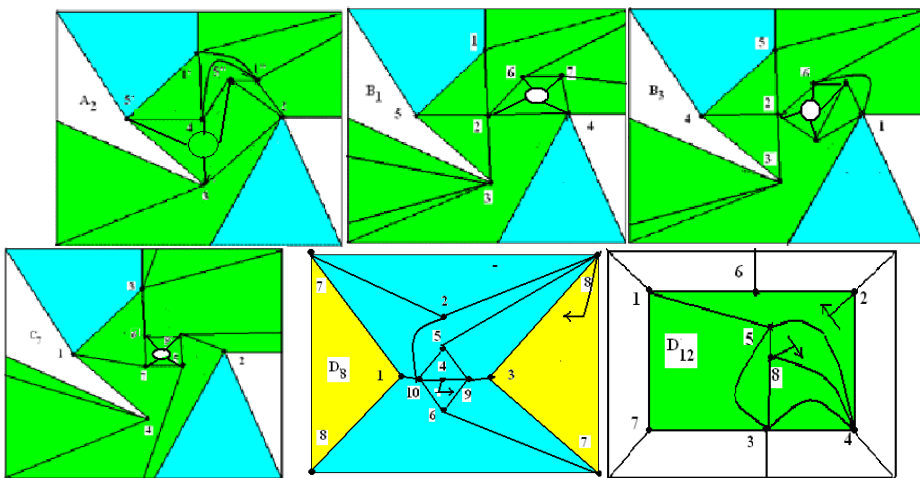


Рис.3.3. Схематичні вкладення графів A_2 , B_1 , B_3 , C_7 , D_8 та D_{12} в поверхню Клейна, за умови видалення кратних ребер.

Твердження 4. Для графів D_{17} , E_{13} , E_{18} , E_{22} із мінімального базису проективної площини маємо ϕ -перетворення задані наступними формулами, за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі в новоствореному графі:

$$1) \quad \phi(K_4 + St_M(K_4)), \sum_{i=1}^4 (i' + i'') \rightarrow (D_{17}, \{i\}_{i=1}^4), \quad \text{де } St_M(K_4) \in$$

квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з M , $M = \{(1'', 5), (2'', 8), (3'', 6), (4'', 7)\}$, як це показано на рис. 4.1;

$$2) \quad \phi(K_{3,3} + K_{2,3}, \sum_{i=1}^3 (i' + i'')) \rightarrow (E_{13}, \{i\}_{i=1}^3);$$

$$3) \quad \phi(K_{3,3} + St_M(K_{2,3}), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (E_{18}, \{i\}_{i=1}^5), \quad \text{де } St_M(K_{2,3}) \in$$

квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M висячих ребер,

$M = \{(3'',9), (5'',7)\}$, як показано на рис. 4.1;

$$4) \quad \varphi(St_{M_1}(K_{2,3}) + St_{M_2}(K_{2,3})), \sum_{i=1}^5 (i' + i'') \rightarrow (E_{22}, \{i\}_{i=1}^5), \quad \text{де}$$

$St_{M_i}(K_{2,3})$ є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною M_i висячих ребер, $i=1,2$, $M_1 = \{(3',9)\}$, $M_2 = \{(4'',7), (3'',6), (2'',8)\}$, як це показано на рис. 4.1;

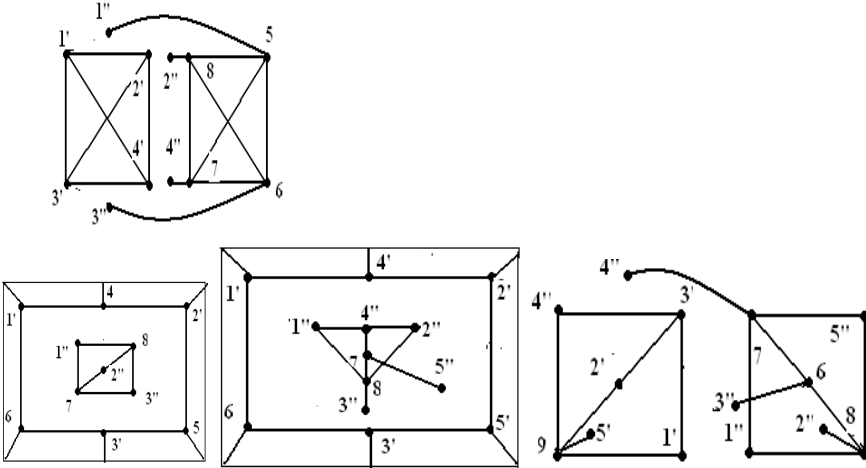


Рис. 4.1. Зліва-направо, перші два графи для φ -перетворення на граф D_{17} , наступні два графи для E_3 та E_{18} , а останні два для E_{22} .

Доведення. Доведемо формулу 1) твердження 4. Позначимо через G_1 граф K_4 , а через G_2 граф $St_M(K_4)$, який є квазізіркою з центром-графом K_4 та висячими ребрами з множини M , $M = \{(1'',5), (2'',8), (3'',6), (4'',7)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , $s \in P \setminus f_1(G_1)$, як вкладення графа K_4 в P та трьох висячих ребер до зовнішньої грані s' , а ребро $(4'',7)$ вкладене до s'' , де $\{s', s''\} \subset s \setminus f_2(G_2)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^4) = 2$, бо клітка $s = \bar{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин

графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$ кліток s', s'' . Виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2) матимемо нерівність $\gamma(D_{17}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1,3,4}^4 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^4$ і вкладемо висяче ребро $f_2'(4'', 7)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(4', 4'')$ на 4. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: D_{17} \rightarrow S_2$ графа D_{17} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(D_{17}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(D_{17}) = 2$. Формула 1) твердження 4 доведена.

Доведемо формулу 2) твердження 3. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $K_{2,3}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин $\{1', 2', 3'\}$ розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до площини, де $s \in P \setminus f_1(G_1)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^3) = 2$, бо клітка $s = \overline{s \setminus \partial s}$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $2'' \in \partial s'' \setminus \partial s'$, кліток s', s'' . Тому, виконавши ϕ -перетворення формули 2), матимемо нерівність $\gamma(E_3) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок, причому посередині однієї з цих стрілок розмістимо вершину $2'$, а $2''$ на середині іншої. В результаті матимемо замість кліток s', s''

недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^3)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^3) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню цю недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^3 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^3$. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: E_3 \rightarrow S_2$ графа E_3 до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_3) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_3) = 2$. Формула 2) доведена.

Доведемо формулу 3) твердження 4. Позначимо через G_1 граф $K_{3,3}$, а через G_2 граф $St_M(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та висячими ребрами з множини M , $M = \{(2'', 8), (5'', 7)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_1 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до двоклітки площини, $s \in P \setminus f_1(G_1)$, причому висяче ребро $(2'', 8)$ розміщене на зовнішньої грані s' , а до s'' вкладене ребро $(5'', 7)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5) = 2$, бо клітка $s = \bar{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $5'' \in \partial s'' \setminus \partial s'$, $\{i''\}_1^4 \in \partial s'$. Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(E_{18}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток, так щоб вершина $5''$ була серединою одної стрілки, а $5''$ - серединою іншої стрілки. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1,3,4}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1,3,4}^5$ і вклавши висяче ребро $f_2'(5'', 7)$

на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(5', 5'')$ на 5. Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2} = f_1 + f_2'$, $f: E_{18} \rightarrow S_2$ графа E_{18} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_{18}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_{18}) = 2$. Формулу 3) доведено.

Доведемо формулу 4) твердження 4. Позначимо через G_1 граф $St_{M_1}(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною висячих ребер M_1 , $M_1 = \{(5', 9)\}$, а через G_2 граф $St_{M_2}(K_{2,3})$, який є квазізіркою з центром-графом $K_{2,3}$ та множиною висячих ребер M_2 , $M_2 = \{(4'', 7), (3'', 6), (2'', 8)\}$. Розглянемо вкладення f_1 графа G_1 до проективної площини P , при якому множина вершин розташовуватиметься на границі деякої клітки s , та вкладення f_2 , $f_2: G_2 \rightarrow s$, графа G_2 до цієї s , як вкладення графа $K_{2,3}$ до двоклітки площини, $s \in P \setminus f_1(G_1)$, причому висячі ребра $(2'', 8)$, $(4'', 7)$, $(5', 9)$ розміщені на зовнішньої грані s' , а до s'' вкладене ребро $(3'', 6)$. Матимемо число досяжності $t_{G_2}(\{i''\}_1^5) = 2$, бо клітка $s = \bar{s} \setminus \partial s$ є двокліткою, а множина вершин графа G_2 розміщується на границях $\partial s', \partial s''$, причому $5'' \in \partial s'' \setminus \partial s'$, $\{i''\}_1^4 \in \partial s'$. Тому, виконавши ϕ -перетворення співвідношення 2), матимемо нерівність $\gamma(E_{22}) \geq 2$. Приєднаємо ленту Мебіуса до двох кліток s', s'' , де $s' \in s \setminus f_2(G_2)$, $s'' \in (s \setminus f_2(G_2)) \setminus s'$, шляхом ототожнення із збереженням напрямку пари різнонаправлених стрілок із цих кліток, так щоб вершина $5''$ була серединою одної стрілки, а $5''$ -серединою іншої стрілки. В результаті матимемо замість кліток s', s'' недвоклітку l проективної площини на якій множина $f_2(\{i''\}_{i=1}^4)$ є досяжною, тобто $f_2(\{i''\}_{i=1}^4) \subset \partial l$. Перетворимо f_2 на f_2' зробивши зовнішньою гранню недвоклітку l та ототожнимо пари вершин $\sum_{i=1}^5 (i' + i'')$ на $\{i\}_{i=1}^5$ і вклавши висяче ребро $f_2'(5'', 7)$ на приклеєну ленту та ототожнимо пару вершин $(5', 5'')$ на 5.

Отримаємо вкладення $f|_{G_1+G_2}=f_1+f_2'$, $f:E_{22} \rightarrow S_2$ графа E_{22} до пляшки Клейна, причому рід задовольнятиме нерівності $\gamma(E_{22}) \leq 2$. Таким чином $\gamma(E_{22})=2$. Формулу 4) доведено. Доведення твердження 4) закінчено.

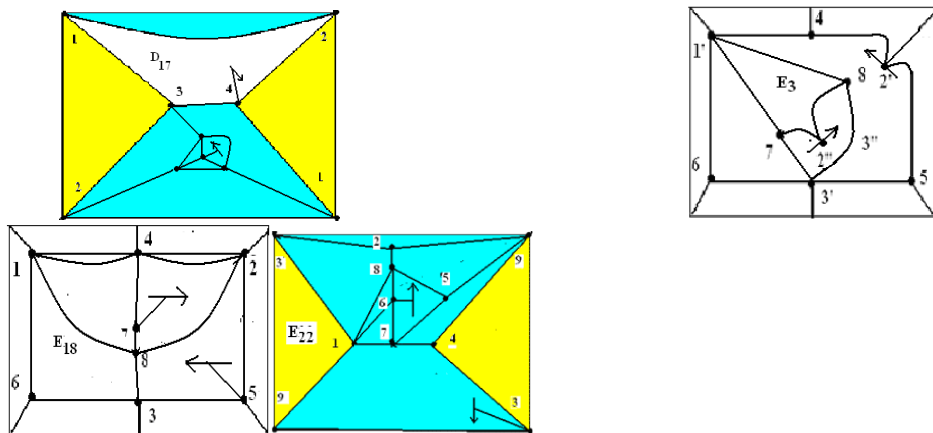


Рис.4.2. Схематичні вкладення графів D_{17} , E_3 , E_{18} та E_{22} в поверхню Клейна, за умови видалення одного з двох кратних ребер, які можливі у графі.

Терма 1. Граф-обструкція неорієнтовного роду 2 є результатом ϕ -перетворення не більше ніж двох зв'язних графів X, Y , які задовольняють одному з наступних випадків:

1) графи X, Y гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, і множини точок приєднання є досяжними;

2) графи-квазіірки X, Y із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2;

3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проєктивної площини Σ , а інший X - граф-квазіірка із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання до графа Y із числом досяжності 2;

4) граф $X \in K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$ вкладеними до проєктивної

площини, а граф Y графом-квазізіркою з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2.

Доведення теореми 1. Нехай G довільний граф –обструкція проєктивної площини.

Тоді за допомогою перетворень методу компонент [8] отримаємо з графа G базисний граф G' , який може бути, або 2-зв'язним і для нього матимуть місце твердження 3 та 4, або не 2-зв'язним і для нього матимуть місце, або $G' = A_1$, або $G' = A_5$. Доведення закінчено.

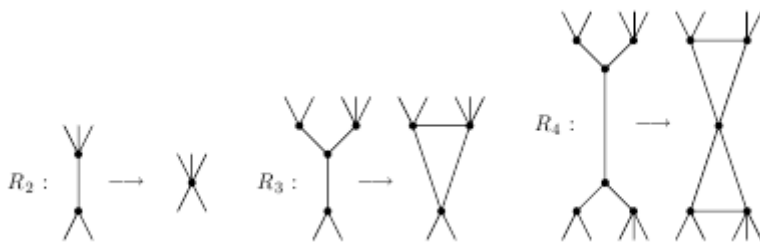


Рис 6. Перетворення методу компонент, R_0 -видалення ребра.

Терема 2. Довільна граф-обструкція \mathfrak{Z} неорієнтовного роду $\gamma(\mathfrak{Z})$, $\gamma(\mathfrak{Z}) > 1$ є результатом ϕ -перетворення не більше ніж двох зв'язних графів X, Y , якщо $\gamma(\mathfrak{Z}) = 2$ і виконується одна з наступних умов:

1) граф X граф-обструкція неорієнтовного роду $\gamma(X)$, $\gamma(X) = \gamma(\mathfrak{Z}) - 1$, граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, і множини точок приєднання є досяжними;

2) графи-квазізірки X, Y із центрами гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2;

3) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ та вкладений до проєктивної площини Σ , а інший X - граф-квазізірка із центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання до графа Y із числом досяжності 2;

4) граф $X \in K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$ вкладеними до проективної площини, а граф Y графом-квазізіркою з центром гомеоморфним K_4 чи $K_{2,3}$ та, можливо, висячими ребрами і множиною точок приєднання з числом досяжності 2.

Доведення. Нехай G - довільний граф-обструкція проективної площини S_1 . Тоді довільне ребро u графа G має розміщуватися деяким мінімальним вкладенням $f, f: G \rightarrow S_2$ на ленті Мебіуса прикріпленої до S_1 , яка є результатом отождоження двох протилежно направлених стрілок, взятих із середини двох клітин s_1, s_2 з множини $S_2 \setminus f|_{G \setminus u}(G \setminus u)$ та без точок їхніх границь, а множина ребер $G^1 \setminus u$ може не мати підмножини з ребер K_5^1 чи $K_{3,3}^1$. Вкладення $f|_{G \setminus u}: G^1 \setminus u \rightarrow S_1$ розміщує $G^1 \setminus u$ на проективній площині. З іншого боку, жодна пара точок графів K_5 чи $K_{3,3}$ не має числа досяжності 2, бо інакше мали б, принаймні, один з графів на множинах ребер $K_5^1 \cup u$ чи $K_{3,3}^1 \cup u$ з неорієнтованим родом 2, що неможливо. Якщо в графі G є підграф чи частина H гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме підграф M графа G , якому належатиме, принаймні, одна з кінцевих вершин ребра u графа G та підмножина $G^1 \setminus H^1 \cup X$, де $X \subset H^1$, із, принаймні, одним ребром, що не належатиме підграфу H . Зауважимо на те, що підграф M має вкладатися в s -одну із клітин мінімального вкладення підграфа H в S_1 без перетину пари ребер, які належать до пари простих ланцюгів, що парами кінцевих точок розділятимуть одна одну на границі клітки до якої вкладатимуться, або завдяки двосторонньому доступу до пари цих вершин.

Якщо в $G \setminus u$ є підграф чи частина H , гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M з числом досяжності множини вершин не менше 2, заданий на непустій підмножині множині ребер $G^1 \setminus H^1 \cup X$, де $X \subset H^1$, та, принаймні, одним ребром, яке не належатиме підграфу H , якому належатиме, принаймні, одна з кінцевих точок ребра u графа G .

Якщо в $G \setminus u$ для деякого ребра u немає підграфа чи частини H гомеоморфної K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M графа G із множиною вершин, що має на проєктивній площині число досяжності множини вершин не менше 2, бо кінцеві вершини не належать до границі однієї з клітин, т.то множина du має число досяжності 2. У разі припущення, що видалення довільного ребра u приводить до відсутності в $G \setminus u$ підграфа H гомеоморфного K_5 чи $K_{3,3}$, то граф $G \setminus u$ матиме множину вершин з числом досяжності 2 та матиме площинний підграф M' гомеоморфний K_4 чи $K_{2,3}$, тому виконуючи додавання довільного ребра отримаємо $M' + u$ - єдиний підграф гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$, тобто граф G вкладатиметься до проєктивної площини, що є протиріччям умові теореми; припущення неправильне.

Якщо видалення деякого ребра u графа G призводить до того, що $G \setminus u$ не матиме частини чи підграфа H , гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$, то існуватиме площинний підграф M з числом досяжності множини вершин не менше 2, якому належатимуть кінцеві вершини ребра u , та вкладений в проєктивну площину так, що множина кінцевих вершин ребра u матиме число досяжності 2.

Таким чином, для графа $G \setminus u$ маємо два наступні варіанти:

- 1) є підграф чи частина гомеоморфні K_5 чи $K_{3,3}$,
- 2) немає підграфа чи частини гомеоморфної K_5 чи $K_{3,3}$.

Розглянемо варіант 1), який має наступні два підваріанти: а) Є підграф чи частина гомеоморфні $K_{3,3}$; б) Є підграф чи частина гомеоморфні K_5 .

Розглянемо підваріант а). Позначимо через H , $H \cong K_{3,3}$, через f мінімальне вкладення $f: G \setminus u \rightarrow S_1$, яке є звуженням деякого мінімального вкладення f' графа G до S_2 та $f|_H$ - єдине мінімального вкладення графа H до S_1 . Тоді підграф M , що містить решту ребер графа G розміщується в середині двоклітки

$s, s \in S_1 \setminus f|_H(H)$, та приєднується до H принаймні однією вершиною. Оскільки граф $K_{3,3}$ має двократний доступ до довільної пари точок на несуміжних ребрах, то підграф M має два різних простих ланцюги l_1, l_2 довжини 2, які в графі $f(G)$ на проєктивній площині перехрещуються між собою (у випадку продовження вкладення шляхом $f(u) \subset s$) та з'єднуються, принаймні, ребром u . Ланцюги l_1, l_2 довжини 2 містять, або обидві кінцеві вершини ∂u та вкладенням f розміщуються в різних псевдоклітках підграфа $f(H)$, реалізуючи на проєктивній площині число досяжності 2 та двократний доступ для множини ∂u , або містять тільки одну кінцеву вершину ребра u , а іншу містить підграф H . Зауважимо, що припущення про ланцюги l_1, l_2 довжини 1 означатиме вкладення графа $f(H \cup l_1 \cup l_2 \cup u)$ до S_1 , тобто суперечить тому, що граф G роду 2. Таким чином існуватиме ϕ -перетворення графів H та $St(M)$ задане так, як у виписаних в умові теореми випадках 1) чи 3). Стверджуємо, що множина кінцевих вершин довільного ребра u графа G належить до множини точок або найменшого по включенню підграфа H'' графа G гомеоморфного K_4 чи $K_{2,3}$, або найбільшого по включенню підграфа H' графа G гомеоморфного $K_5 \setminus e$ чи $K_{3,3} \setminus e$.

Розглянемо підваріант б). Нехай в графі $G \in H$ - підграф чи частина гомеоморфні K_5 . Позначимо через $H, H \cong K_5$, через f мінімальне вкладення $f: G \setminus u \rightarrow S_1$, яке є звуженням деякого мінімального вкладення f' графа G до S_2 та $f|_H$ - мінімального вкладення графа H до S_1 . Тоді підграф M , що містить решту ребер графа G розміщується в середині двоклітки $s, s \in S_1 \setminus f|_H(H)$, та приєднується до H принаймні однією вершиною. Оскільки граф K_5 не має двократного доступу до довільної пари точок на несуміжних ребрах, то підграф M має два

різних простих не вироджених ланцюги l_1, l_2 , які в графі $f(G)$ на проєктивній площині мають довжину 2 та перехрещуються між собою (у випадку продовження вкладення шляхом $f(u) \subset s$) і з'єднуються, принаймні, ребром u , або мають довжину 1 та перехрещуються в середині двоклітки графа H , що вкладений до проєктивної площини. Таким чином у випадку 1) існуватиме ф-перетворення графа H та квазізірки $St(M)$, яка може вироджуватися в пару розділених ребер, задане так, як у виписаних в умові теореми випадках 1) чи 3).

Розглянемо варіант 2). Видалення довільного ребра u призводить до появи в $G \setminus u$ найменшого по включенню підграфа чи частини гомеоморфної $K_5 \setminus u$ або $K_{3,3} \setminus u$, позначеної через H_1 . Через H_2 позначимо підграф чи частину породжену рештою ребер $G^1 \setminus H_1^1$ та всіма тими ребрами, що з'єднують спільні кінцеві вершини ребер з H_i , $i=1,2$, графа $G \setminus u$. Позначимо через W підмножину спільних вершин, $W = H_1^0 \cap H_2^0$, а через $G \setminus u[W]$ породжений множиною підграф графа $G \setminus u$. Виконаємо розщеплення кожної вершини w_i на пару вершин (w_{i1}, w_{i2}) , так щоб виконувалася умова $\deg_{G \setminus u}(w_i) = \deg_{H_1}(w_{i1}) + \deg_{H_2}(w_{i2})$. Позначимо через W_i , $i=1,2$, підграф графа H_i породжений множиною вершин $\{w_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$ та множиною ребер, що утворилися при розщепленні вершин спільних ребер, причому в одному з W_i можлива відсутність копії спільного ребра. Згідно варіанту 2) маємо наступне: а) не існуватиме простого ланцюга який належатиме до H_1 кінцевими вершинами, а його ребра та інші вершини належатимуть до H_2 , б) існуватиме в H_i , принаймні, пара різних простих ланцюгів $l_i(u_i, w_1)$, $i=1,2$, що починаються в вершині u_i та закінчується в w_1 , $w_1 \in W$.

Наступні два підваріанти є вичерпними:

- а) $f(G \setminus u)$ є однозв'язним підграфом; б) $f(G \setminus u)$ є блоком;

Розглянемо підваріант 1) варіанта 2). Позначимо через f мінімальне вкладення графа G до S_2 , а через H_1 підграф $f|_{H_1}(H_1)$ чи частину графа $f(G \setminus u)$, де $u = (u_1, u_2)$, гомеоморфну $K_5 \setminus u$ чи $K_{3,3} \setminus u$ та яка містить вершину u_1 ребра $f(u)$ разом з всіма кінцевими вершинами ребер суміжних з u_1 і вложена до клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(G \setminus u)$. Позначимо через H_2 підграф чи частину із множиною ребер $f(G^1 \setminus u) \setminus H_1^1$, яка містить вершину u_2 ребра $f(u)$ та всі кінцеві вершини ребер суміжних з u_2 та всі ребра графа $G \setminus u$, що з'єднують їх. Оскільки в $f(G \setminus u)$ існує простий ланцюг $l = l(u_1, u_2)$, що з'єднує кінцеві вершини ребра u та містить також спільну вершину v цих H_i , $i=1,2$, і множина $\{u_1, u_2\}$ має на проєктивній площині число досяжності 2, то стверджуємо, що $\{v, u_2\}$ матиме на проєктивній площині число досяжності 1. Якби припустили, що $\{v, u_2\}$ матиме на проєктивній площині число досяжності 2, то тоді мали б підграф $f|_{H_1}(H_1)$ який неможливо було би вкласти до клітини s_1 . Це означатиме, що H_2 є площинним графом –квазізіркою із деяким центром M , який містить вершини з $\{v, u_2\}$ графа $f(G \setminus u)$ та гомеоморфним одному з наступних графів: $K_5 \setminus u$, $K_{3,3} \setminus u$, K_4 , $K_{2,3}$.

Розглянемо підваріант 2) варіанта 2). Позначимо через f мінімальне вкладення графа G до S_2 , а через H_1 підграф чи частину графа $f(G \setminus u)$, де $u = (u_1, u_2)$, гомеоморфну $K_5 \setminus u$ чи $K_{3,3} \setminus u$ та яка містить вершину u_1 ребра $f(u)$ разом з всіма кінцевими вершинами ребер суміжних з u_1 і вложена до S_1 . Для визначеності вважатимемо, що $f|_{H_1}(H_1)$ вложено до проєктивної площини S_1 так, що множина $\{u_1, w_1\}$, $w_1 \in W$, розіщена на границі клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(H_1)$, тобто має на проєктивній площині число досяжності 1. Позначимо через H_2 підграф чи частину $G \setminus u$

із множиною ребер $f(G^1 \setminus u) \setminus H_1^1$, вкладених в клітини $s_1 \cup \partial s_1$, який містить вершину u_2 та всі кінцеві вершини ребер суміжних з u_2 , а також всі ребра підграфа H_1 , що з'єднують спільні вершини обох цих H_i , $i=1,2$, графа $G \setminus u$. Підграф H_2 буде площинним з множиною вершин, що матиме число досяжності не менше 2, та вкладеним в середину клітини s_1 , $s_1 \in S_1 \setminus f|_{G \setminus u}(H_1)$, так, що $f(\{u_1, w_{11}, w_{12}\}) \subset \partial s_1$ та $f(\{u_2, w_{21}, w_{22}\}) \not\subset s_1$, де $\{w_1, w_2\} \subset H_1 \cap H_2$. З умови двозв'язності графа $G \setminus u$ випливає існування в підграфі H_2 принаймні пари різних простих ланцюгів $l_i = l(u_1, u_2)$ довжин не менше 2, $i=1,2$, що з'єднують кінцеві вершини ребра u та містять принаймні дві різні вершини w_i , які є спільними для підграфів H_i , $i=1,2$.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129–135.
4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen. Elem. Math. 1978, 33, № 3, 57 – 61.
5. Archdeacon Dan. A Kuratowski theorem for the projective plane. J. Graph Theory, 5(3):243–246, 1981.
6. Glover Henry H., Huneke John P., Wang Chin San. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. J. Combin. Theory Ser. B, 27(3):332–370, 1979.
7. Epifanov G. V.. Reductin of a plane graph to an edge by star-triangle transformations. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 166:19–22, 1966.
8. Flòtotto Anna. Embeddability of graphs into the Klein surface. PHDissertation. Univ. Bielefeld, Mai 2010.
9. Петренюк В.І. Властивості мінімальних графів проективної площини. Матеріали міжнародного симпозіуму “Питання

оптимізації обчислень (ПОО –XXXV)”, 2009 р., стр 194-197.

10. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Die Minimalbasis der Menge aller nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. J. Reine Angew.Math., 327:119–142, 1981.

11. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Über Relationen auf Graphen-mengen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 51:232–243, 1981.

12. R. Bodendiek, H. Schumacher, and K. Wagner. Zur Minimalstruktur der nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. J. Reine Angew. Math., 321:99–112, 1981.

13. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.

14. Петренюк В.І. Свойства графов минимальных базисов проективной плоскости и тора.

Матеріали 11-го міжнародного семінара „ Дискретная математика и её приложения”, посвящен ного 80-летию со дня рождения академика О.Б.Лупанова, Москва, МГУ, 18-23 июня 2012, с 514-516.

15. Петренюк В.І. Про властивості мінімальних базисів тору та проективної площини. Матеріали 12-го міжнародного науково-практичного семінару , Кіровоград, 14-15 жовтня 2011 року с.81-84.

16. Петренюк В.І. Исследование структуры плоских графов с задонной достижимостью множества точек. Диссертация. ИК НАНУ, Киев, 14 января 2004 г.

17. D. Archdeacon. The Graph theory. Survey, 1995.

18. Brunet, Richter, Siran Covering genus reducing edges with Kuratowsky subgraphs, Journal of graph theory, vol. 22, 32-45, 1996.

ПРО СТРУКТУРУ 10-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ- ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ТОРА

В. І. Петренюк, А.Я.Петренюк, В.Д. Хох

Кіровоградський національний технічний університет

Задача полягає у посиленні гіпотези Гловера про покриття множини ребер графа-обструкції на n вершинах підграфами, ізоморфними 1-підрозділеним графам K_5 чи $K_{3,3}$, шляхом заміни терміну “1-підрозділ лані” на “гомеоморфні”, тим самим допускаючи видалення деяких ребер чи стягування ребер в точку, а також допускаємо належність деякого ребра двом підграфам заданого графа, гомеоморфним $K_{3,3}$ чи K_5 . Основний результат – побудовано граф-контрприклад для посиленої форми гіпотези Гловера.

Вступ. Основні позначення взяті із [1], [2]. Нехай G неорієнтований скінченний граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а S – замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то позначатимемо її Σ .

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів, мінімальних над S позначимо через Γ_S .

Множина всіх графів, що неприводяться над S і містить Γ_S , характеризує множину всіх графів, рід яких не менше $\gamma(S) + 1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площина, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Визначення 1,2 узяті з [3], [4], відповідно.

Нехай $S = \sigma$ - орієнтований 2-многовид роду $\gamma(\sigma)$, $\gamma(\sigma) > 0$. Розглядувана задача побудови всіх графів, що неприводяться над σ , зводиться, як показано в [5], до задачі переліку всіх блоків, тобто графів без точок з'єднання, що неприводяться над σ .

Доведено в [9], що графи $B_1, B_2, B_3, K_{3,7}$ неприводяться для тору σ_1 , а G_n n -мінімальний блок, що неприводиться при $n > 1$. Граф G_n був побудований в [6], а в [7], [8] було доведено, що є три 2-неприведених підграфи графа K_8 , а саме: $B_1 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1)$, $B_2 = (K_8^0, K_8^1 \setminus (K_{1,2}^1 \cup 2K_2^1))$, $B_3 = (K_8^0, K_8^1 \setminus K_{2,3}^1)$. В [18] розв'язувалася ця ж задача, доведено, що один граф містить підграф, ізоморфний B_3 , тобто має зайве ребро. В [9] наведено два графи G_1, G_2 неприведені для тору, а в [14] знайдені в обох зайві ребра. В [10] доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний над тором. Граф $K_{3,7}$ наведено в [11], де було доведено, що $K_{3,11}$ мінімальний для подвійного тору σ_2 . В [10], [13] зроблено припущення, що граф $K_{3,4p+3}$ є $p(+)1$ -мінімальний блоком, $p > 0$, та доведено, що граф $K_{3,7}$ мінімальний для пляшки Клейна, а $K_{3,9}$ мінімальний для поверхні ейлерової характеристики -1 . Наведений в [15] повний список 63-х 2-неприведених графів із 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можна побачити в онлайн PhD-дисертації Hur Suhjin[26] «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10», на відміну від [16], [17]. Спочатку в [27], а потім в [19], [20] виписані 2-неприведені для тору графи без підграфів гомеоморфних $K_{3,3}$. Більше наведено в [21]. В [15] було підтверджено для тору **гіпотезу Гловера про покриття множини ребер графа-обструкції на 8-ми та 9-ти вершинах підграфами, ізоморфними 1-підрозділеним графами K_5 чи $K_{3,3}$** . А в [30] наведено контрприклад для цієї гіпотези, а саме граф-обструкція для тора на 10-ти вершинах, який є ϕ -образом графа $K_{3,3}$ та квазізірки з центром K_5 із двома парами висячих ребер, що приєднуються попарно до двох несуміжних вершин графа $K_{3,3}$; на рис.1 це перший граф, вкладений в 2-тор.

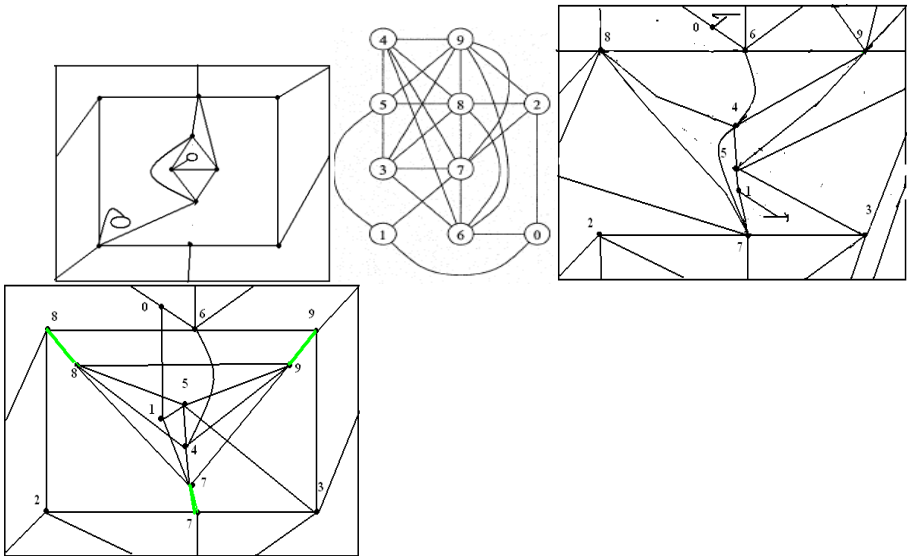


Рис 1. Графи G_1, G_2 (зліва направо) – контр приклади до гіпотези Гловера для тору.

Змінимо гіпотезу шляхом заміни терміну “1-підрозділені” на “гомеоморфні”, тим самим допускаючи видалення деяких ребер чи стягування ребер в точку. А також допускаємо належність деякого ребра двом підграфам заданого графа, гомеоморфним $K_{3,3}$ чи K_5 .

Задача полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 10-ти вершинах, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату ϕ -перетворення на підмножинах множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи з кількома додатковими ребрами) та квазізірки K із центральним графом M на двох, трьох чи чотирьох вершинах.

Твердження 1. Маємо наступні співвідношення:

1. Для тора графі G_1, G_2 є граф-обструкціями порядку 10;
2. Існує ϕ -перетворення графів $K_{3,3}$ та $St_{4(2,2)}(K_4)$ на граф G_1 ,
 задане наступним чином:

$\varphi(K_{3,3} + St_{4(2,2)}(K_4), \sum_{i=1,2}^9 (i' + i'')) \rightarrow (G_1, \{i\}_{i=1}^2)$, де $\{i'\}_{i=1}^2$ – пара несуміжних вершин графа $K_{3,3}$, $\{i''\}_{i=1}^2$ – множина з попарно склеєних висячих вершин графа $St_{4(2,2)}(K_4)$;

3. Існує φ -перетворення графів K , $K = (K_{3,3}^0 + \{v\}, K_{3,3}^1 + \{e_i\}_{i=1}^3)$ та $St_{5(1,1)}(K_5 \setminus (8'', 9''))$ на граф G_2 , задане наступним чином:

$$\varphi(K + St_{5(1,1)}(K_5 \setminus (8'', 9'')), \sum_{i=0, i \neq 1, 4, 5}^9 (i' + i'')) \rightarrow (G_2, \{i\}_{i=0, i \neq 1, 4, 5}^9), \quad \text{де}$$

$K_{3,3}^0 = \{2', 3', 6'\} + \{7', 8', 9'\}$, $K_{3,3}(\{2', 3', 6'\}) = K_{3,3}\{7', 8', 9'\} = \overline{K_3}$, $\{e_i\}_{i=1}^3$ – множина із трьох ребер, серед яких два суміжних ребра із спільною вершиною 6 та внутрішньою вершиною v , $0'' = v$, і третє ребро $(8'', 9'')$ несуміжне з першими двома ребрами, $\{i''\}_{i=0, i \neq 1, 4, 5}^9$ – множина висячих вершин квазіірки $St_{5(1,1)}(K_5 \setminus (8'', 9''))$ з центром $K_5 \setminus (8'', 9'')$ та п'ятьма висячими ребрами, серед яких стиснуті в точку ті висячі ребра, що мають кінцеву вершину з множини $\{7'', 8'', 9''\}$;

Доведення. Співвідношення 1 для графа G_1 впливає з [30], а для G_2 впливає з [33], як для пропущеного Неуфілдом та Майрволдом [31], [32]. Співвідношення 2 та 3 мають очевидний зміст, наведений на рис. 1. Співвідношення 2 та 3 є формальним видом структури графів G_1, G_2 , наведених на рис 1, причому G_1 є контр прикладом для гіпотези Гловера, а граф G_2 є контр прикладом для зміненої форми цієї гіпотези.

Задача опису структури графів-обструкцій порядку 10 полягатиме у поданні графів-обструкцій роду 2 на 10-ти вершинах, у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату φ -перетворення на підмножинах множин точок (точок приєднання із заданими характеристиками – числом досяжності та двостороннім доступом) одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ (можливо без ребра чи з кількома додатковими ребрами) та квазіірки K з центральним графом M на двох, трьох чи чотирьох вершинах.

Число досяжності підмножини M множини точок графа G роду γ , $\gamma = \gamma(G)$, що є найменшою кількістю клітин з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а f , $f: G \rightarrow S$, довільне мінімальне вкладення, при якому елементи $f(M)$ розташовуються на границях клітин із підмножини Δ , потрібне для оцінки роду ϕ -образу деякого графа та простої зірки; у випадку заміни зірки на квазізірку доповнимо наступними визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вершин графа.

Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr – кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножин $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$, на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узяті по всіх мінімальних вкладеннях f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок, які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k – сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітини s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f – задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного з принаймні трьох елементів множини M та вкладені без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітини s , $s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом

$p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G з довільної внутрішньої точки замкнутої клітини \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$, узяті по всіх s та всіх f_k , називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G . В подальшому вважатимемо, що $S_\gamma = \sigma_2$, тобто є 2-тором.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 1970.
3. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129–135.
4. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Graphen. Elem. Math. 1978, 33, № 3, 57–61.
5. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404–405.
6. Auslander L. Brown T. Youngs J. W. T. The embedding graphs in manifolds. J. Math. and Mech. 12, 1963, 629–634.
7. Brown T. Duke R. An irreducible graph consisting a single block. J. Math. and Mech. 1966, 15, № 1, 129–135.
8. Duke R. A. Haggard G. The genus subgraphs K_8 . Israel J. Math. 11 (1972) 452–455.

9. Huneke J. P. A genus a graph. Relations between combinatorics and other parts mathematics. Amer. Math. Soc. Providence R. I v 34 1979 357 – 364.

10. Joachim E. Minimale nicht in die Ringfläche einbettbare Grapghen. Elem. Math. 1978, 33 № 3 57 – 61.

11. Joachim E. Minimale Grapghen ouf orientierbaren geschlossenen Flächen. Math. phis. Semesterber 1979 26 № 2 205 – 216.

12. Joachim E. Zur Theorie der nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 7 212 – 216.

13. Joachim E. Beispiele nicht ebenen Graphen. Praxis Math. 22 (1980) № 9 279 – 281.

14. Петренюк В.І. Властивості 2-незведених простих графів. Штучний інтелект №2,2008,с.34-40

15. Huneke J.P, Johns G, A.Hlavachek 9-Vertex Irreducible Graphs on the Torus. Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 2006.

16. Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory Ser B12 (1972) 6 – 31.

17. Milgram M. Irreducible graphs. J. Combin Theory 14 (1973) 7- 45.

18. Youngs J. W. Irreducible graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 404 – 405.

19. Gagarin A., William K. Embedding graphs containing K_5 -subdivisions. Ars Combinatoria, 64:33– 50,2002.

20. Gagarin A., Myrvold W., Chambers J. The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. , 1 February 2008

21. Mochar B., Kawarabayashi K. Some Recent Progress and Applications in Graph Minor Theory, July 11, 2006

22. Петренюк В.І. Об оценке рода специальных графов. деп. рукоп в УкрНИИТИ №2259-Ук86 22.09.1986

23. Mohar B. Face covers and the genus problem for apex graphs. J. Combin. Theory, B 2001. v. 82 p.102-117.

24. Петренюк В.І. Узагальнена оцінка роду простого графа. Искусст. интеллект. 2004. т., 4. с. 34-45.

25. Петренюк В. И. Две характеристики дуального графа плоского графа. Мат. межд. конф. "Искусст. интеллект-2004",

Кацивели, Украина: "Наука і освіта", 2004. с. 230-231.

26. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.

27. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. *Combinatorica* 6,3, 1986 245-260

28. D. Archdeacon. A Kuratowski theorem for the projective plane. *Journal of Graph Theory*, 5:243–246, 1981

29. Петренюк В.И. Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода Сборник трудов XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» г. Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г., стр. 363-368.

30. R. Brunet, R. B. Richter, J. Siran, Covering genus-reducing edges by Kuratowski subgraphs, *J. Graph Theory* 22 (1996) 39-45.

31. E. Neufeld. Practical toroidality testing. Master's thesis, Department of Computer Science, University of Victoria, 1993.

32. E. Neufeld and W. Myrvold. Practical toroidality testing. In *Proceedings of the Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (New Orleans, Louisiana, January 5-7, 1997), pages 574-580, 1997.

33. Skala M.A., W. Myrvold. Generations toroidal embeddings. Веб-ресурс.

ОТОБРАЖЕНИЯ МАТРОИДОВ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Ревякин А. М., Исаченко А. Н.

arevyakin@mail.ru, isachenkoan@mail.ru,

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Белорусский государственный университет

Аннотация. Изучаются свойства сильных и слабых отображений матроидов. С помощью разбиений определено несколько специальных матроидов, для которых тождественная функция на фиксированном подмножестве индуцирует сильные отображения. Рассмотрены различные подходы к определению нечетких матроидов. Как обобщение сильного отображения матроидов введено

понятие нечеткого сильного отображения нечетких матроидов и изучены его свойства.

Abstract. We study the properties of weak and strong maps of matroids. With the help of partitions defines several special matroids for which an identity function on a fixed subset induces strong maps. The article considers different approaches to the definition of fuzzy matroids. As a generalization of strong maps of matroids the notion of strong fuzzy maps of fuzzy matroids and examined its properties.

Основные определения и обозначения теории матроидов, используемые в работе, можно найти в [1–3]. Пусть $M = (S, I)$ матроид на конечном множестве S с семейством независимых множеств I и ранговой функцией $r(A)$. Напомним, что подмножество A множества S называется замкнутым, если $r(A \cup a) > r(A)$ для каждого $a \in S \setminus A$. Семейство замкнутых множеств (поверхностей) образует геометрическую решетку.

Введём нулевой элемент 0 , 0 не принадлежит S , который соответствует пустому множеству \emptyset и обозначим через $\{\emptyset\}$ матроид с нулевым рангом на 1-элементном множестве $\{0\}$. Пусть матроид $M_0 = M + \{\emptyset\}$ – прямая сумма матроидов M и $\{\emptyset\}$ на множестве $S \cup 0$. Сильным отображением матроида M на множестве S в матроид N на множестве T (обозначение: $M \Rightarrow N$) называется функция $\sigma: S \cup 0 \rightarrow T \cup 0$ такая, что $\sigma(0) = 0$, и прообраз каждого замкнутого множества N_0 замкнут в M_0 . Слабым отображением матроида M на множестве S в матроид N на множестве T (обозначение: $M \rightarrow N$) называется функция $\sigma: S \cup 0 \rightarrow T \cup 0$ такая, что $\sigma(0) = 0$ и если A подмножество множества S таково, что отображение $\sigma|_A$ является взаимно однозначным на A и $\sigma(A)$ – независимое множество в матроиде N_0 , то A – также независимое множество в матроиде M .

Основные результаты о слабых и сильных отображениях можно найти в [4–6]. Далее приведем некоторые из них, а также их обобщения на нечеткие матроиды [7].

Пусть M и N – матроиды на одном и том же множестве S , $M \cup N$ – их объединение, M^* – матроид, двойственный к матроиду M , M_k – k -усечение матроида M , а M / A и $M \restriction A$ – соответственно сжатие и сужение матроида M на подмножество A множества S . Тогда тождественная функция на $S \cup 0$ индуцирует сильные

отображения $M \Rightarrow M_k$ и $M \cup N \Rightarrow M$. Причем, если $M \Rightarrow N$, то $M \rightarrow N$ (обратное неверно) и $N^* \Rightarrow M^*$.

Нетрудно показать, что следующие условия эквивалентны:

а) тождественная функция на $S \cup 0$ индуцирует $M \rightarrow N$;
 б) каждое независимое множество в N является также независимым в M ;

в) каждое зависимое множество в M также зависимо в N ;

г) каждый цикл из M содержит цикл из N ;

д) $r_M(A) \geq r_N(A)$ для каждого подмножества A множества S .

Кроме того, если A – подмножество множества S . То функция

$\sigma(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in S \setminus A; \\ 0, & \text{если } a \in A \cup 0 \end{cases}$ индуцирует $M \Rightarrow M/A$, тождественная

функция на $S \cup 0$ – сильное отображение

$M/A \Rightarrow M$, а $f(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in A; \\ 0, & \text{если } a \in (S \setminus A) \cup 0 \end{cases}$ – слабое отображение $M \rightarrow M/A$.

Теорема 1. Пусть FN – свободное, а N – произвольное наращения матроида M на S . Тогда тождественная функция индуцирует слабое отображение $FN \rightarrow N$.

Теорема 2. Если $M \cap N = (M^* \cup N^*)^*$, то $M \Rightarrow M \cap N$.

Матроид $M \cap N$ из теоремы 2 называется произведением матроидов M и N .

Теорема 3. Пусть R – подмножество множества S (элементы из R будем считать «красными»). Тогда семейство подмножеств A множества S таких, что $|A|=r+1$, где $r(S)=r$, и A содержит единственный цикл из M с ровно одним красным элементом, образует семейство баз некоторого матроида M^R и тождественная функция на множестве $S \cup 0$ индуцирует сильное отображение $M^R \Rightarrow M$.

Теорема 4. Пусть $M=(S, I)$ – матроид ранга r , $S=B \cup R$ – разбиение множества S на два непересекающихся подмножества («черное» и «красное»), $r(B)=r$ и I_R состоит из всех подмножеств A множества B таких, что $A \in I$, $|A|=r-1$, для которых найдется такое $a \in R$, что $A \cup \{a\} \in I$. Тогда если I_R – непустое множество, то оно совпадает с семейством всех баз некоторого матроида M_R на

множестве B и тождественная функция на $B \cup \emptyset$ индуцирует сильное отображение $M - R \Rightarrow M_R$.

Теорема 5. Предположим, что $M=(S,I)$ – матроид ранга r , $S=B \cup R \cup G$ разбиение множества S на попарно непересекающиеся подмножества («черное», «красное» и «зеленое») и $r(B)=r$. Пусть $I_{R,G}$ – семейство всех подмножеств A множества B таких, что $A \in I$, $|A| = r-2$ и существуют $a \in R$, $b \in G$ такие, что $A \cup \{a,b\} \in I$. Тогда если $I_{R,G}$ – непустое множество, то оно совпадает с семейством всех баз некоторого матроида $M_{R,G}$ на множестве B и тождественная функция на $B \cup \emptyset$ индуцирует сильное отображение $M - (R \cup G) \Rightarrow M_{R,G}$.

Теорема 6. Пусть $M=(S,I)$ – матроид ранга k , а $S=B \cup R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_p$ – разбиение множества S на попарно непересекающиеся подмножества, $r(B)=k$ и семейство I^* содержит все такие подмножества A множества B , что $A \in I$, $|A|=k-p$ и найдутся такие $a_i \in R_i$, для которых $A \cup \{a_1, \dots, a_p\} \in I$. Тогда если I^* – непусто, то оно образует семейство баз некоторого матроида $M_{R_1 \dots R_p}$ на множестве B и тождественная функция на $B \cup \emptyset$ индуцирует сильное отображение $M - (R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_p) \Rightarrow M_{R_1 \dots R_p}$.

Теорема 6 является обобщением теорем 4 и 5, впервые доказанными А.Речки в [6]. Приведенные результаты используются в приложениях для определения жесткости ферм и решения задач электротехники [1,2].

Перейдем теперь к нечетким множествам [8] и нечетким матроидам [7].

Нечетким множеством μ на множестве S называется отображение $\mu: S \rightarrow [0,1]$. Пусть $F(S)$ – семейство всех нечетких множеств S и $\mu, \nu \in F(S)$. Введем обозначения: $\text{supp } \mu = \{x \in S : \mu(x) > 0\}$, $m(\mu) = \inf\{\mu(x) : x \in \text{supp } \mu\}$, $\mu \vee \nu = \max\{\mu, \nu\}$, $\mu \wedge \nu = \min\{\mu, \nu\}$. Скажем, что $\mu < \nu$, если для всех $x \in S$ справедливо соотношение $\mu(x) \leq \nu(x)$ и существует

$a \in S$ такое, что $\mu(a) < \nu(a)$. Число $|\mu| = \sum_{x \in S} \mu(x)$ будем называть мощностью нечеткого множества $\mu \in F(S)$.

Пусть S – конечное множество, $F(S)$ – множество нечетких множеств на S и P – непустое подмножество семейства $F(S)$. Пара (S, P) называется нечетким матроидом (см. [7]) на множестве S , а множества из P – независимыми нечеткими множествами, если выполняются следующие условия: а) если $\mu \in P$, $\nu \in F(S)$ и $\mu < \nu$, то $\nu \in P$; б) если $\mu, \nu \in P$ и $|\text{supp } \mu| < |\text{supp } \nu|$, то найдется $\omega \in P$ такое, что $\mu < \omega \leq \mu \vee \nu$ и $m(\omega) \geq \min\{m(\mu), m(\nu)\}$.

Имеются и другие способы определить нечеткий матроид, но с менее богатой матроидной теорией. Например, пара (S, P) , где S – конечное множество, $F(S)$ – множество нечетких множеств на S и P – непустое подмножество семейства $F(S)$, называется слабым нечетким матроидом на множестве S , а множества из P – независимыми нечеткими множествами, если выполняются следующие условия: а) если $\mu \in P$, $\nu \in F(S)$ и $\mu < \nu$, то $\nu \in P$; б) если $\mu, \nu \in P$, $|\text{supp } \mu| < |\text{supp } \nu|$ и $m(\mu) \leq m(\nu)$, то найдется $\omega \in P$ такое, что $\mu < \omega \leq \mu \vee \nu$ и $m(\mu) \leq m(\omega)$.

Такие способы определения позволяют перенести в теорию нечетких матроидов понятия ранговой функции, суммы, и объединения матроидов, двойственности и даже «жадный» алгоритм. Например, ранговой функцией нечеткого матроида $M = (S, P)$ называется неотрицательная действительная функция $\rho(\mu)$, определенная для всех $\mu \in P$, такая, что $\rho(\mu) = \sup\{|\mu| : \nu \leq \mu \text{ и } \nu \in P\}$.

Для ранговой функции нечеткого матроида $M = (S, P)$ выполняются соотношения монотонности (если $\mu, \nu \in P(S)$ и $\mu < \nu$, то $\rho(\mu) \leq \rho(\nu)$) и полумодулярности ($\rho(\mu) + \rho(\nu) \geq \rho(\mu \vee \nu) + \rho(\mu \wedge \nu)$ для всех $\mu, \nu \in P(S)$).

Как и в случае матроидов, нечеткий матроид можно задать с помощью нечеткой функции ранга. В самом деле, пусть отображение $\rho: F(S) \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяет условиям:

а) если $\mu \in F(S)$, то $0 \leq \rho(\mu) \leq |\mu|$; б) если $\mu, \nu \in F(S)$ и $\mu \leq \nu$, то $\rho(\mu) \leq \rho(\nu)$; в) если $\mu, \nu \in F(S)$, то $\rho(\mu) + \rho(\nu) \geq \rho(\mu \vee \nu) + \rho(\mu \wedge \nu)$. Тогда $M = (S, P)$, где $P = \{\mu: \rho(\mu) = |\mu|\}$, является нечетким матроидом с нечеткой функцией ранга ρ .

Пусть $FM = (S, P)$ – нечеткий матроид и $\mu \in P$. Тогда нечетким замыканием множества μ называется $\bar{\mu} = \bigwedge_{\lambda \in P, \mu \leq \lambda} \lambda$.

Пусть S_1 и S_2 – два множества, μ_1 является нечетким множеством в S_1 , μ_2 – нечетким множеством в S_2 и $f: S_1 \rightarrow S_2$ – отображение. Определим нечеткие множества $f(\mu_1)$ (образ μ_1) и $f^{-1}(\mu_2)$ (прообраз μ_2) следующим образом:

$$f(\mu_1)(y) = \begin{cases} \sup\{\mu_1(x): x \in f^{-1}(\{y\}), y \in \text{Range}(f)\}; \\ 1, \text{ в противном случае} \end{cases} \quad \text{и} \\ f^{-1}(\mu_2)(x) = \mu_2(f(x)) \text{ для всех } x \in S_1.$$

Нечетким сильным отображением нечеткого матроида $FM_1 = (S_1, P_1)$ в нечеткий матроид $FM_2 = (S_2, P_2)$ называется такое отображение $f: S_1 \rightarrow S_2$, что прообраз каждой нечеткой поверхности (замкнутого нечеткого множества) в FM_2 является нечеткой поверхностью в FM_1 .

Теорема 7. Пусть $FM_1 = (S_1, P_1)$ и $FM_2 = (S_2, P_2)$ – нечеткие матроиды и $f: S_1 \rightarrow S_2$ – отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) f является нечетким сильным отображением;
- б) $f(\bar{\mu}_1) \leq \overline{f(\mu_1)}$ для каждого нечеткого множества μ_1 в FM_1 ;
- в) $\overline{f^{-1}(\mu_2)} \leq f^{-1}(\bar{\mu}_2)$ для всех нечетких множеств μ_2 в FM_2 .

Для нечетких матроидов также можно определить нечеткие слабые отображения по аналогии с матроидами, но это тема дальнейших исследований.

Литература

1. Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics – Budapest: Akad. Kiado, 1989
2. Revyakin A.M. Matroids. // J. Math. Sci. – 2002. – V. 108, № 1. – P. 71–130.
3. Welsh D.J.A. Matroid Theory. – London: Academic Press, 1976. – 433 с.
4. Kung J.P.S. Strong maps // In: Theory of matroids / Ed. White N. – Cambridge Univ. Press. – 1986.– P. 224 – 253
5. Kung J.P.S., Nguyen Hien Quang. Weak maps // In: Theory of matroids / Ed. White N. – Cambridge Univ. Press.– 1986.– P. 254 – 271
6. Ревякин А.М., Речки А. Сильные и слабые отображения матроидов и их применение. //Материалы VIII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения (2–6 февраля 2004 г.) – М.: МГУ, 2004. – С. 219 – 221
7. Goetschel R.(Jr.), Voxman W. Fuzzy matroids // Fuzzy Sets and Systems. – 1988. – 27. – P. 291–302.
8. Wang Peizhuang. Fuzzy sets theory and applications. – Guang Zhou: Guang Zhou Univ., 1985. – 189 с.

ПРО ДИСТАНЦІЙНУ АНТИМАГІЧНУ РОЗМІТКУ ЦИРКУЛЯНТНОГО ГРАФА $C_{2p+2}(2, 3, \dots, p-1, p+1)$

Семенюта М. Ф.

marina_semenyuta@mail.ru,

Кіровоградська льотна академія НАУ

Аннотация. Изучается (a, d) -дистанционная антимagicкая разметка циркулянтных графов.

Abstract. We study a (a, d) -distance antimagic labeling of a circulant graph.

За останні 20 років виникло багато різних типів і підтипів розміток, з якими можна ознайомитися в електронному журналі Д. Галліана [1]. В даній статті йдеться про (a, d) -дистанційну антимagiczną розмітку, яку ввели С. Арумугам і Н. Камачі в 2012

році [2]. Це антиміагічна версія дистанційного типу розмітки, вона безпосередньо пов'язана з дистанційною магічною розміткою. Остання була запропоновано незалежно в 1994 році В. Вілфред [3] і в 2003 році М. Міллер та ін. [4]. Дистанційна магічна розмітка та її різновиди застосовуються до задач планування, зокрема в плануванні неповних турнірів з різними властивостями. Д. Фрончек використав дистанційні магічні та врівноважені дистанційні магічні мультичасткові граfi в якості моделей неповних кругових турнірів. (a, d) -Дистанційна антиміагічна розмітка стає дистанційною магічною, якщо $d=0$, тому її можна вважати узагальненням цього поняття.

Автори [2] встановили, що цикл C_n є (a, d) -дистанційним антиміагічним графом, при непарному n і $d=1$, якщо ж $a, d \geq 2$, то для циклу C_n не існує (a, d) -дистанційної антиміагічної розмітки. В [5] доведено, що граф mC_n буде (a, d) -дистанційним антиміагічним, якщо mn – непарне і $d=1$. Поширимо це дослідження на випадок r -регулярних графів з $r \geq 2$, а саме циркулянтних графів.

Означення 1 [2]. (a, d) -Дистанційною антиміагічною розміткою графа $G=(V, E)$ порядку n називається така бієкція $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, що множина всіх ваг вершин утворює арифметичну прогресію $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ з першим членом a і різницею d , де a, d – фіксовані невід'ємні цілі числа і $a \geq 1, d \geq 0$. Граф G , що допускає таку розмітку, називають (a, d) -дистанційним антиміагічним графом.

Серед регулярних графів широкою популярністю користується циркулянтні граfi $C_n(s_1, s_2, \dots, s_m)$. Вони знайшли застосування в проектуванні обчислювальних мереж, мережі передачі даних і розподільних обчисленнях.

Нехай s_1, s_2, \dots, s_m, n – натуральні числа, такі, що $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m < n$. Неорієнтований граф $C_n(s_1, s_2, \dots, s_m)$ з множиною вершин $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ і ребрами (u_i, u_{i+s_j}) , для $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$, де $i+s_j$ береться за модулем n , називають циркулянтним графом, а m – його розмірність.

Елементи породжуваної множини $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ називають *твірними* циркулянтного графа $C_n(s_1, s_2, \dots, s_m)$ порядку n і

розмірності m . Його степінь дорівнює $2m$, якщо $s_m \neq n/2$. Якщо n парне і $s_m = n/2$, то $C_n(s_1, s_2, \dots, s_m)$ має степінь $2m-1$. В [6, 7] показано, що циркулянтний граф є зв'язним, тоді і тільки тоді, коли $\text{НСД}(s_1, s_2, \dots, s_m, n) = 1$.

В наступній теоремі розглянуто окремий випадок циркулянтного графа.

Теорема 1. Циркулянтний граф $C_{2p+2}(2, \dots, p-1, p+1)$ є $(2p^2 - p - 5, 1)$ -дистанційним антимагічним.

Доведення. Розглянемо циркулянтний граф $C_{2p+2}(2, 3, \dots, p-1, p+1)$ розмірності $p-1$. Для множини його вершин V введемо позначення $V = \{u_1, u_2, \dots, u_{2p+2}\}$. Для $p \geq 4$, $C_{2p+2}(2, 3, \dots, p-1, p+1)$ є зв'язним графом, так як $\text{НОД}(2, \dots, p-1, p+1) = 1$, а для $p=3$ (рис.1) цей граф має дві компоненти зв'язності. Задамо вершинну розмітку f :

$$\begin{aligned} f(u_i) &= i, \\ f(u_{i+p+1}) &= 2p + 3 - i, \end{aligned}$$

де $i=1, 2, \dots, p+1$.

Мітки вершин утворюють множину $\{1, 2, \dots, 2p+2\}$.

$C_{2p+2}(2, \dots, p-1, p+1)$ є доповненням циркулянтного графа $C_{2p+2}(1, p)$, який, в свою чергу, допускає дистанційну магічну розмітку [8]. При вершинній розмітці f , $C_{2p+2}(1, p)$ буде дистанційним магічним графом з магічною сталою $k=4p+6$.

Тоді вершини $C_{2p+2}(2, \dots, p-1, p+1)$ одержать наступні ваги

$$w(u_i) = (2p+3)(p+1) - k - f(u_i) = 2p^2 + p - 3 - f(u_i).$$

Ваги вершин $w(u_1), w(u_2), \dots, w(u_{2p+2})$ утворюють зростаючу арифметичну прогресію з різницею $d=1$ і першим членом $a=2p^2 - p - 5$.

Таким чином, граф $C_{2p+2}(2, \dots, p-1, p+1)$ є $(2p^2 - p - 5, 1)$ -дистанційним антимагічним.

Теорему доведено.

Приклад циркулянтного графа $C_8(2, 4)$ наведено на рисунку 1.

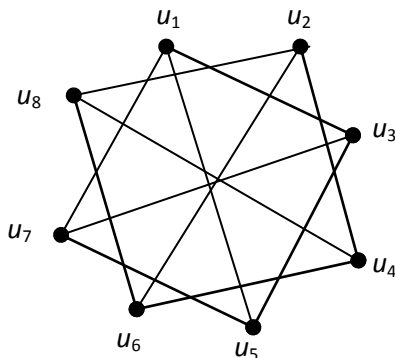


Рис. 1. Циркулянтний граф $C_8(2, 4)$

Графа $C_8(2, 4)$ є 3-регулярним $(10, 1)$ -дистанційним антимагічним графом розмірності 2. Задамо вершинну розмітку f , як визначено в теоремі 1: $f(u_1)=1, f(u_2)=2, f(u_3)=3, f(u_4)=4, f(u_5)=8, f(u_6)=7, f(u_7)=6, f(u_8)=5$. Ваги вершин

$$w(u_1) = f(u_3) + f(u_5) + f(u_7) = 17,$$

$$w(u_2) = f(u_4) + f(u_6) + f(u_8) = 16,$$

$$w(u_3) = f(u_1) + f(u_5) + f(u_7) = 15,$$

$$w(u_4) = f(u_2) + f(u_6) + f(u_8) = 14,$$

$$w(u_5) = f(u_1) + f(u_3) + f(u_7) = 10,$$

$$w(u_6) = f(u_2) + f(u_4) + f(u_8) = 11,$$

$$w(u_7) = f(u_1) + f(u_3) + f(u_5) = 12,$$

$$w(u_8) = f(u_2) + f(u_4) + f(u_6) = 13$$

утворюють арифметичну прогресію. Тому розмітка $f \in (10, 1)$ -дистанційною анти магічною для $C_8(2, 4)$.

Література

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling, Electron // The electronic journal of combinatorics. – 2015. – 18 P. 157-163.

2. Arumugam S., Kamatchi N. On $(a; d)$ -distance antimagic graphs // Australasian journal of combinatorics. – 2012. – Vol. 54. – P. 279-287.

3. Vilfred V. Perfectly regular graphs or cyclic regular graphs and Σ -labeling and partitions // Srinivasa Ramanujan Centenary Celebrating-International Conference in Mathematics, Anna University, Chennai, Tamil Nadu, India. – 1987. – Abstract A23.

4. Miller M., Rodger C., Simanjuntak R. Distance magic labelings of graphs // Australian Journal of combinatorics. – 2003. – Vol. 28. – P. 305-315.

5. Nalliah M. Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. thesis // M. Nalliah. – The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam, 2014.

6. Воробьев В. А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. – 1974. – № 60. – С. 35-45.

7. Boesch F.T., Tindell R. Circulant and their connectivity // J. Graphs Theory. – 1984. – No. 8. – P. 487-499.

8. Cichacz S., Froncek D. Distance magic circulant graphs. // Discrete Mathematics. – 2016. – Vol. 339, No. 1 – P. 84-94.

СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ РИСКОВ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Смирнов А.А., Коваленко А.В.

dr.SmirnovOA@gmail.com

Кировоградский национальный технический университет

В работе получила дальнейшее развитие методика структурной идентификации рисков разработки программного обеспечения, отличающаяся от известных построением оценки рисков разработки программного обеспечения «сверху» в виде множества, при наличии произвольного непротиворечивого конечного набора «квантов информации»

The work was further developed methodology of structural identification of the risks of software development that is different from the known building risk assessment

software development "from above" as a set, in the presence of an arbitrary finite consistent set of "quantum information"

В данной работе рассматривается составляющая методика комплекса методов качественного анализа и количественной оценки рисков разработки программного обеспечения, что позволило решить противоречие, возникающих при разработке ПО, и заключающееся в пренебрежении фирмами-разработчиками ПО факторов уязвимости безопасности ПО.

В качестве решения указанной проблемы предложено использование разработанных методов качественного анализа и количественной оценки рисков разработки программного обеспечения.

Проведенные исследования показали, что для решения задачи определения взаимовлияния рисков целесообразно использовать инструмент анализа причинно-следственных связей между различными факторами и рисками, разработанный Каору Исикава (диаграмма Исикавы).

В соответствии с известным принципом Парето, среди множества потенциальных причин (причинных факторов, по Исикаве), порождающих проблемы (следствие), лишь две-три являются наиболее значимыми, их поиск и должен быть организован.

Применение диаграммы Исикавы позволяет выяснить причины каких-либо проблем в организации или, например, причины возникновения эксплуатационных «багов» ПО.

Изображение диаграммы Исикавы дает возможность получить более подробную информацию о возможности взаимовлияния различных видов риска друг на друга, что так же даст уточняющие данные для количественного анализа рисков. Однако задачу выбора наиболее приоритетных рисков диаграмма решить не может.

Для решения этой задачи в диссертационной работе предлагается использовать математический аппарат многокритериальной оптимизации, основанной на локальной геометрии множества Парето.

Анализ литературы показал, что существуют, по крайней мере, три формулировки многокритериальной оптимизации, основанной на локальной геометрии множества Парето:

1. Локальная. Найти одно Парето-оптимальное решение (ближайшее к заданной начальной точке).

2. Глобальная. Найти конечное множество Парето-оптимальных решений, достаточно хорошо описывающее (покрывающее) истинный Парето-фронт.

3. Интерактивная. Найти Парето-оптимальное решение, максимально удовлетворяющее предпочтениям лица принимающего решение (ЛПР).

Проведенные исследования показали, что в процессах, построенных на принципах постоянных коммуникаций между участниками, использования «мозговых штурмов» с привлечением мнений экспертов, целесообразным представляется использование интерактивной формулировки многокритериальной оптимизации.

Проведенные исследования показали, что в настоящее время существует множество подходов учета мнения экспертов (метод анализа иерархий, реализованный в программном продукте *EXPERT CHOICE*, метод «искусственного» отношения предпочтения, и др.) однако все они обладают существенными недостатками, главный из которых заключается в том, что, несмотря на многообразие и детальную изученность иерархий и «искусственных» отношений, крайне редко какое-либо из них можно считать удовлетворяющим конкретное ЛПР в полной мере.

Характерным примером, подтверждающим данный факт является пренебрежение оценкой уязвимостей разработанного ПО (недостаточность или полное отсутствие реп-тестирования).

Поэтому для решения задачи выбора наиболее приоритетных рисков (сужение множества Парето) предлагается использовать «кванты информации».

Для этого рассмотрим произвольные оценки рисков разработки ПО $y' = (y_1', \dots, y_m')$ и $y'' = (y_1'', \dots, y_m'')$, принадлежащие множеству парето-оптимальных векторов $f(P_f(X))$. По определению

множества Парето должны найтись такие два непустых подмножества номеров критериев $A, B \subset I = \{1, 2, \dots, m\}$, что

$$y_i' > y_i'', \quad y_i' - y_i'' = w_i > 0, \quad \forall i \in A, \quad (1)$$

$$y_j'' > y_j', \quad y_j'' - y_j' = w_j > 0, \quad \forall j \in B, \quad (2)$$

$$y_s'' = y_s', \quad \forall s \in I \setminus (A \cup B). \quad (3)$$

Согласно условиям (1-3), первый вектор превосходит второй по компонентам группы критериев А, тогда как второй превосходит первый по компонентам группы критериев В. По остальным компонентам (если таковые имеются) два указанных вектора совпадают. Сужение множества Парето, т.е. удаление некоторых парето-оптимальных векторов, обычно происходит на основе сравнения.

Человеку проще всего сравнивать пары. Если при сравнении фиксированной пары парето-оптимальных векторов y' и y'' вида (1-3) ЛПР «выбраковывает» один из этих векторов (например, второй), то это означает, что для него первый вектор предпочтительнее второго, т.е. $y' \succ y''$, где \succ – отношение предпочтения, определённое на всём критериальном пространстве \mathcal{R}^m и совпадающее на множестве Y с отношением $\succ y$.

Соотношение $y' \succ y''$, задаёт «квант информации» об отношении строгого предпочтения, который свидетельствует о готовности ЛПР к компромиссу – оно согласно пойти на потери по всем критериям группы В в размере w_j ради того, чтобы получить прибавки в размере w_i по критериям группы А, сохранив при этом значения всех остальных критериев.

Наличие указанного «кванта информации» позволяет сократить множество Парето на один вектор y'' . Для того чтобы добиться большего сокращения, можно принять, что $y' \succ y''$, имеет место не только для данной пары векторов, но и для всех тех векторов, которые удовлетворяют условиям (1-3) при неизменных значениях w_i и w_j .

В этом случае предложено говорить, что группа критериев А важнее группы В. При указанном расширении действия «кванта информации» можно рассчитывать на более заметное сужение множества Парето, хотя нередко и оно оказывается недостаточным для окончательного выбора.

В таких случаях имеет смысл наложить дополнительные требования на отношение предпочтения так, чтобы действие «кванта информации» в сужении множества Парето оказалось более эффективным.

Позднее было установлено, что они представляют собой дальнейшее усиление системы двух упоминавшихся ранее аксиом, гарантирующих выполнение принципа Эджворта-Парето.

Аксиома 1 (аксиома исключения).

Аксиома 2.

Отношение \succ определено на всём критериальном пространстве \mathcal{R}^m и является транзитивным на нём.

Аксиома 3 (аксиома согласования).

Из двух векторов, отличающихся один от другого единственной компонентой, для ЛПР предпочтительнее вектор, имеющий большую компоненту.

Аксиома 4 (аксиома инвариантности).

Отношение предпочтения \succ инвариантно относительно линейного положительного преобразования (т.е. является линейным).

Пусть один критерий (или группа критериев) важнее другого критерия (другой группы критериев), если имеет место некоторое условие Ξ , которое содержит определённую информацию об отношении предпочтения ЛПР.

Отсюда ясно, что без определения важности критериев всегда можно обойтись, оперируя в процессе принятия решений непосредственно с условием Ξ .

Чтобы воспользоваться определением важности, основанном на «кванте информации» и использующем в качестве условия Ξ соотношения (1-3), сначала следует объяснить ЛПР это определение важности, убедиться, что оно его «усвоило», после

чего для выявления предпочтений ЛПР задать ему вопрос на «языке важности»: является ли группа критериев A важнее группы B с параметрами w_i и w_j (для $i \in A$ и $j \in B$).

Из известно, что бинарное отношение \succ , заданное на векторном пространстве \mathfrak{R}^m , называется конусным, если существует такой конус $K \subset \mathfrak{R}^m$, что соотношение $y' \succ y''$ имеет место тогда и только тогда, когда $y' - y'' \in K$.

Аксиома 5.

Любое бинарное отношение \succ , заданное на векторном пространстве \mathfrak{R}^m и удовлетворяющее аксиомам 2–4, является конусным с острым выпуклым конусом (без начала координат), который содержит все векторы с неотрицательными компонентами. Обратно, всякое конусное отношение \succ с указанным конусом удовлетворяет аксиомам 2–4.

Аксиома 5 открывает возможность использования аппарата выпуклого анализа и построения содержательной математической теории для учёта различного набора «квантов информации».

Наиболее простой случай одного «кванта» рассматривается в следующем утверждении, доказательство которого опирается на факты из теории двойственности выпуклого анализа.

Аксиома 6.

Пусть выполнены аксиомы 2–4 и имеется «квант информации» об отношении предпочтения \succ . Тогда для любого множества выбираемых вариантов $S(X)$, удовлетворяющего аксиоме 1, справедливы включения $S(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X)$, причём «новый» векторный критерий g может быть образован из функций f_i для всех $i \in I \setminus B$:

$$g_{i,j} = w_j f_i + w_i f_j \text{ для всех } i \in A, j \in B, \quad (4)$$

либо из функций f_i для всех $i \in I \setminus B$:

$$f_0 = \min_{i \in A} \frac{f_i}{w_i} + \min_{j \in B} \frac{f_j}{w_j} \quad (5)$$

Важная особенность аксиомы 6 заключается в отсутствии каких-либо требований к множеству X и векторному критерию f : эти объекты могут быть любыми. Ограничения накладываются лишь на поведение ЛПР в процессе принятия решений и выражаются они в форме аксиом 1–4.

Аксиомой 6 указывается оценка сверху $P_g(X)$ для неизвестного множества выбираемых вариантов $S(X)$, более точная, чем множество Парето $P_f(X)$. Сама оценка представляет собой множество парето-оптимальных вариантов, но относительно «нового» векторного критерия g .

Для того, чтобы сформировать g , из «старого» векторного критерия f следует удалить все компоненты группы критериев B и добавить один нелинейный критерий f_0 вида (5), либо $|A| \cdot |B|$ «новых» линейных критериев вида (4), где $|L|$ обозначает число элементов конечного множества L .

Вариант с нелинейной функцией f_0 вида (5) можно применять для количественных критериев, значения которых измеряются в шкале отношений, тогда как вариант (4) допускает использование ещё и в шкале интервалов.

Нелинейную функцию f_0 вида (5) можно использовать для изучения случая, когда одна группа критериев важнее другой, где в отличие от приведённой выше аксиоматики используется операция транзитивного замыкания бинарного отношения и некоторые другие предположения.

Как показали исследования учёт нескольких «квантов информации» должен в большей степени способствовать сужению множества Парето.

Однако, некоторые может случиться ситуация, когда ряд «квантов информации» будут иметь противоречивый смысл, и их использование будет невозможным.

Поэтому важной является задача выбора непротиворечивых «квантов информации». В рамках работы под непротиворечивым

названо такое множество, которое «порождает» иррефлексивное отношение.

Построение оценки сверху для неизвестного множества выбираемых векторов $S(Y)=f(S(X))$ в виде множества $\bar{P}(Y)=f(P_g(X))$ при наличии произвольного непротиворечивого конечного набора «квантов информации» в случае конечного множества Y сводится к последовательной проверке соотношения

$$y' \succ_m y'' \quad (6)$$

для всех пар допустимых векторных оценок $y', y'' \in Y$, где \succ_m – бинарное отношение, которое строится на основе имеющегося непротиворечивого множества «квантов информации».

Таким образом, получила дальнейшее развитие методика структурной идентификации рисков разработки ПО, отличающаяся от известных построением оценки рисков разработки ПО «сверху» в виде множества, при наличии произвольного непротиворечивого конечного набора «квантов информации».

РАЗРАБОТКА СПОСОБА КОНТРОЛЯ ЛИНИЙ СВЯЗИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОБЛАЧНЫХ АНТИВИРУСОВ

Смирнов А.А., Смирнов С.А., Дидык А.К.

dr.SmirnovOA@gmail.com

Кировоградский национальный технический университет

В работе разработаны способы контроля линий связи телекоммуникационной системы при передаче информационных пакетов метаданных для облачных антивирусов

The work developed and explored ways to control communication lines telecommunication systems in the transmission of information packets for metadata cloud antivirus

Исследования процесса обслуживания информационных пакетов метаданных в многопротокольном маршрутизаторе ТКС показали, что основными его элементами, влияющими на

вероятностно-временные показатели качества обслуживания являются: коммутатор, депакетизатор, блок управления маршрутизатором, запоминающее устройство (буфер памяти) и анализатор линий связи.

Отличительной особенностью представленного маршрутизатора является включение в его состав анализатора линий связи и ассоциативного блока нейросетевых экспертов, построенного на основе нейронной сети АРТ-1. Указанные блоки выполняют задачи мониторинга канала связи и управления процессом маршрутизации в условиях возможных злоумышленных подключений.

В предлагаемом алгоритме безопасной маршрутизации такие блоки предполагается использовать в каждом узле связи (УС) телекоммуникационной системы.

Для того чтобы маршрутизатор мог функционировать, необходимо сформировать информацию о состоянии соединений, исходящих из данного узла.

Каждому соединению присваивается определённый вектор параметров, компоненты которого характеризуют определённую составляющую физического соединения.

Одними из важнейших параметров, которые необходимо учитывать при выборе дальнейшего пути маршрутизации информации, является тип канала связи, его пропускная способность и функциональная безопасность.

Параметры пропускной способности и функциональной безопасности представляются значениями в интервале от 0 до 1, которые характеризуют тип канала и кабеля связи по сравнению с параметрами, выбранными в качестве эталонных и имеющими максимальные значения пропускной способности и функциональной безопасности.

Формирование обучающей выборки для системы экспертов производится путём анализа линии связи, которая используется в рассматриваемой локальной сети. Вторжение может быть осуществлено путём прямого подсоединения к каналу связи и считывании информации с помощью технических средств.

Вследствие этого должна быть возможность определения попыток подключения к каналу.

Следует заметить, что основная опасность подобного рода злоумышленных вторжений приходится на неконтролируемые участки ТКС, то есть участки глобальных и региональных сетей, в которых чаще всего используются каналы типа Е-1 и Е-2.

Проведенные исследования показали, что в настоящее время, несмотря на высокую стоимость и сложность, существует принципиальная возможность подсоединения к волоконнооптической линии связи (ВОЛС) и несанкционированного доступа к данным, передаваемым по указанным каналам связи.

Наиболее опасными, с точки зрения съема метаданных, передающихся на программные сервера (анализаторы метаданных) представляются разрывные способы несанкционированного доступа. Используя данный способ, злоумышленник имеет широкий спектр возможных воздействий на облачную антивирусную систему в целом, начиная от простого перехвата, заканчивая подменой метаданных. Устройства разрывного несанкционированного доступа позволяют осуществлять более надежный съем данных. Однако разрывное подключение требует временного отключения линий связи, что может послужить сигнализацией о наличии злоумышленного вторжения (несмотря на возможные попытки злоумышленников маскировки такой атаки).

Более незаметным по возможности обнаружения, конечно, является безразрывный способ подсоединения. В этом способе для съема сигнала используется излучение, возникающее естественным образом в результате рассеяния света на муфтах, соединителях, устройствах ввода и вывода оптической мощности, самом оптическом волокне. При этом возможно использование пассивных, активных и компенсационных способов регистрации данных.

Пассивные способы обладают высокой скрытностью, так как практически не меняют параметров распространения излучаемого сигнала в ВОЛС. Однако этот способ имеет недостатки, связанные

с низкой чувствительностью. Поэтому для перехвата метаданных злоумышленники могут использовать участки, на которых уровень бокового излучения повышен. Даже после формирования стационарного распределения поля в волокне небольшая часть рассеянного излучения все же проникает за пределы оболочки и может быть каналом утечки передаваемых метаданных.

Как показали исследования, активные способы позволяют получить сигнал большей мощности и, соответственно повысить эффективность атаки несанкционированного доступа к ВОЛС. Однако при этом происходит изменение параметров (мощности) распространяющегося по ВОЛС сигнала, что также облегчает возможность обнаружения атаки.

Анализ способов съема данных с ВОЛС показал, что для выполнения данной операции на физическом уровне какого-либо участка, можно использовать локальное воздействие на его волоконные световоды. При таком воздействии изменяются их оптические свойства, что и приводит к «вытеканию» сигнала. Методов воздействия на волокно можно перечислить несколько:

- изгиб волокна;
- изменение диаметра волокна (например, путем давления)
- микроизгибы волокна;
- акустическое воздействие на волокно;
- воздействие химическими реактивами.

Проведенные исследования показали, что из этих методов одним из наиболее эффективных для злоумышленников является метод изгиба волокна (позволяет организовать направленный вывод излучения). Изменяя радиус изгиба волокна, злоумышленник может добиться снятия таких величин оптической мощности, которой ему будет вполне достаточно для перехвата метаданных.

Однако, следует заметить, абсолютно незаметным этот метод не является. Поскольку мощность отводится принудительно, то подключение вызовет снижение уровня мощности на приемной стороне линии. Поэтому основным методом обнаружения этого способа несанкционированного доступа является контроль над уровнем мощности на приемной стороне. Если устройство

контроля обнаруживает ее снижение, то оно делает вывод о наличии несанкционированного доступа к ВОЛС и может принять решение о перенаправлении метаданных на программные сервера по другому маршруту.

Проведенные исследования показали, что аппаратура, расположенная на стороне программного сервера контроля и анализа метаданных в облачных антивирусных системах, кроме основных своих функций должна включать в себя систему контроля и обнаружения несанкционированного доступа. В задачу этой системы должны входить: наблюдение за состоянием ВОЛС, контроль принимаемого сигнала и передача его в интеллектуальный ассоциативный блок нейросетевых решений, в котором и принимается решение о наличии несанкционированного доступа к ВОЛС.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О СОВЕРШЕННОМ ПАРСОЧЕТАНИИ АЛГОРИТМАМИ ЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ КРИТЕРИЕВ

Э.В.Терещенко, Е.В. Корнеева

tereschenkoelina@gmail.com, evelinamaz@mail.ru

Запорожский национальный технический университет

Аннотация. Представлено конструктивное доказательство неразрешимости алгоритмами линейной свертки критериев задачи о совершенном паросочетании в многокритериальной постановке. Целевая функция включает в себя три критерия качества, а именно, критерий MINSUM, минимизирующий суммарное расстояние в парах, критерий «узкого места» MINMAX и критерий, минимизирующий количество «узких мест».

Abstract. The proof of non-solvability of the multi-criteria problem of perfect matchings by weighted sum method has been presented. The objective function includes three quality criteria, namely, MINSUM criterion that minimizes the total distance in pairs, the MINMAX criterion of "bottleneck" and criterion that minimizes the number of "bottlenecks".

Рассмотрим задачу о совершенном паросочетании в многокритериальной постановке на полном неориентированном графе $G = (V, E)$. Каждое ребро $e_{ij} \in E$ графа $G = (V, E)$ взвешено числом w_{ij} , $w_{ij} = w_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Допустимым решением x формулируемой на полном графе $G = (V, E)$ задачи является совершенное паросочетание $x = (V, \tilde{E})$, $\tilde{E} \subset E$ [1]. Множество всех допустимых решений (МДР) на графе $G = (V, E)$ обозначим через $X = X(G) = \{x\}$. На МДР X определена векторная целевая функция (ВЦФ)

$$F = (F_1, F_2, F_3), \quad (1)$$

$$MINSUM : F_1 = \sum_{e_{ij} \in \tilde{E}} w_{ij} \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$MINMAX : F_2 = \max_{e_{ij} \in \tilde{E}} w_{ij} \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$MINSUM : F_3 = \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \rightarrow \min, \quad (4)$$

где

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_{ij} = \max_{e_{ij} \in \tilde{E}} w_{ij} \\ 0, & \text{если } w_{ij} \neq \max_{e_{ij} \in \tilde{E}} w_{ij} \end{cases},$$

$$i \neq j, \quad w_{ij} = w_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k_{ij} = k_{ji}.$$

ВЦФ (1)–(4) определяет собой в МДР X паретовское множество \tilde{X} , состоящее из всех паретовских оптимумов $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Рассмотренный ниже пример позволяет конструктивно доказать неразрешимость алгоритмами линейной свертки критериев задачи с ВЦФ (1)–(4).

Пусть дан граф $G=(V,E)$, $|V|=6, |E|=15$. Так как $w_{ij}=w_{ji}$, $i, j=\overline{1, n}$, $i \neq j$, то в матрице весов укажем только элементы выше главной диагонали: $w_{12}=3.16$, $w_{13}=14.11$, $w_{14}=9.70$, $w_{15}=9.00$, $w_{16}=8.66$, $w_{23}=12.21$, $w_{24}=8.60$, $w_{25}=8.30$, $w_{26}=7.41$, $w_{34}=8.66$, $w_{35}=10.30$, $w_{36}=11.05$, $w_{45}=5.00$, $w_{46}=8.31$, $w_{56}=10.20$. Число совершенных паросочетаний в полном графе с чётным n составляет $k=(n-1)!!$, где $n=2l$, $l \in N$. Для $n=6$ $k=(6-1)!!=15$:

$x_1 = \{\{o_1, o_2\}, \{o_3, o_4\}, \{o_5, o_6\}\}$, $x_2 = \{\{o_1, o_2\}, \{o_3, o_5\}, \{o_4, o_6\}\}$,
 $x_3 = \{\{o_1, o_2\}, \{o_3, o_6\}, \{o_4, o_5\}\}$, $x_4 = \{\{o_1, o_3\}, \{o_2, o_4\}, \{o_5, o_6\}\}$,
 $x_5 = \{\{o_1, o_3\}, \{o_2, o_5\}, \{o_4, o_6\}\}$, $x_6 = \{\{o_1, o_3\}, \{o_2, o_6\}, \{o_4, o_5\}\}$
 $x_7 = \{\{o_1, o_4\}, \{o_2, o_3\}, \{o_5, o_6\}\}$, $x_8 = \{\{o_1, o_4\}, \{o_2, o_5\}, \{o_3, o_6\}\}$,
 $x_9 = \{\{o_1, o_4\}, \{o_2, o_6\}, \{o_3, o_5\}\}$, $x_{10} = \{\{o_1, o_5\}, \{o_2, o_3\}, \{o_4, o_6\}\}$,
 $x_{11} = \{\{o_1, o_5\}, \{o_2, o_4\}, \{o_3, o_6\}\}$, $x_{12} = \{\{o_1, o_5\}, \{o_2, o_6\}, \{o_3, o_4\}\}$,
 $x_{13} = \{\{o_1, o_6\}, \{o_2, o_3\}, \{o_4, o_5\}\}$, $x_{14} = \{\{o_1, o_6\}, \{o_2, o_4\}, \{o_3, o_5\}\}$,
 $x_{15} = \{\{o_1, o_6\}, \{o_2, o_5\}, \{o_3, o_4\}\}$. Для рассматриваемой задачи рассчитанные значения критериев (2)-(4) ВЦФ F (1) приведены в табл. 1. Пять несравнимых решений образуют ПМ $\tilde{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{15}\}$. Традиционным методом поиска ПМ является сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с помощью алгоритмов линейной свертки критериев (АЛСК)[1]. Эти алгоритмы базируются на том факте, что при положительно определенной ВЦФ (1)-(4) элемент $x \in X$ является паретооптимальным, если минимизирует линейную свертку критериев

$$F^\lambda(x) = \sum_{y=1}^N \lambda_y F'_y \rightarrow \min, \quad (7),$$

Таблица 1

Значения критериев ВЦФ F для множества допустимых решений X

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
F_1	22,02	21,76	19,21	32,91	30,72	26,52	32,10
F_2	10,20	10,30	11,05	14,11	14,11	14,11	12,21
F_3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

№	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
F_1	29,05	27,41	29,51	28,65	25,08	25,87	27,56	25,63
F_2	11,05	10,30	12,21	11,05	9,00	12,21	10,30	8,66
F_3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2,00

Здесь вектор $\lambda \in A$, где $A = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \sum_{y=1}^N \lambda_y = 1, \lambda_y > 0,$

$y = \overline{1, N}\}$, F'_y -нормированные значения критериев $F_y, y = \overline{1, N}$.

Нормируем значения критериев (2)-(4) по формуле полной нормировки $F'_y = \frac{F_y - \min F_y}{\max F_y - \min F_y}, y = \overline{1, 3}$ (табл. 2).

Таблица 2

Нормированные значения критериев ВЦФ для МДР X

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
F'_1	0,21	0,19	0,00	1,00	0,84	0,53	0,94
F'_2	0,28	0,30	0,44	1,00	1,00	1,00	0,65
F'_3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

№	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
F'_1	0,72	0,60	0,75	0,69	0,43	0,49	0,61	0,47
F'_2	0,44	0,30	0,65	0,44	0,06	0,65	0,30	0,00
F'_3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

По данным табл. 2 образуем линейные свертки критериев (2)-(4) согласно (7) при $N=3$, с учетом равенств $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$:

$$F^\lambda(x_1) = 0.205\lambda_1 + 0.282\lambda_2 + 0(1 - \lambda_1 - \lambda_2),$$

$$F^\lambda(x_2) = 0.182\lambda_1 + 0.300\lambda_2 + 0(1 - \lambda_1 - \lambda_2),$$

$$F^\lambda(x_3) = 0.0\lambda_1 + 0.438\lambda_2 + 0(1 - \lambda_1 - \lambda_2),$$

$$F^\lambda(x_{12}) = 0.428\lambda_1 + 0.062\lambda_2 + 0(1 - \lambda_1 - \lambda_2),$$

$F^\lambda(x_{15}) = 0.469\lambda_1 + 0.0\lambda_2 + 1(1 - \lambda_1 - \lambda_2)$. Анализируя проекции плоскостей $F^\lambda(x_i)$, $i=1,2,3,12,15$ как функций от λ_1 , λ_2 на плоскости $\lambda_1=0$; $\lambda_2=0$; $\lambda_1=\lambda_2$ и $\lambda_1=0,5\lambda_2$, $\lambda_2=0,5\lambda_1$ можно сделать вывод, что графики свертков $F^\lambda(x_i)$, $i=3, 12, 15$ образуют нижнюю границу. Графики $F^\lambda(x_i)$, $i=1,2$ располагаются строго выше этой границы при произвольных значениях $\lambda \in A$, т.е. невозможно сформировать ПМ $\tilde{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_{14}, x_{15}\}$ на основании расчета АЛСК.

Утверждение 1. Для 3-критериальной задачи с ВЦФ вида (1)-(4) проблема нахождения ПМ \tilde{X} с помощью АЛСК неразрешима.

Литература

1. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах/ В.А. Перепелица. — Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 337с.

КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ В ЗАДАЧІ РОЗПІЗНАВАННЯ МОВЛЕННЯ

Тимофієва Н. К.

TymNad@gmail.com

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних
технологій та систем НАН та МОН України*

Аннотация. Показано, что задачи распознавания и синтеза речевых сигналов моделируются в рамках теории комбинаторной оптимизации. Аргументом целевой функции в них являются комбинаторные конфигурации разных типов, а размещением с повторениями представлен входной сигнал.

Abstract. It is shown that the problem of speech recognition and synthesis are modeled in terms of the theory of combinatorial optimization. The argument of objective function in them are combinatorial configuration of different types and placement with repetition are an input signals.

Вступ. Багато задач з обчислювального інтелекту зводяться до задач комбінаторної оптимізації. Для їхнього моделювання необхідно сформулювати цільову функцію та визначити її аргумент, яким є комбінаторні конфігурації різних типів. Це стосується також і розпізнавання мовленнєвих сигналів. Комбінаторна конфігурація в цій задачі може бути як аргументом цільової функції так і вхідними даними.

Задача розпізнавання мовленнєвих сигналів. Подана нижче математична модель розпізнавання мовленнєвих сигналів описана в [1]. Розпізнавання мови це процес автоматичної обробки мовленнєвого сигналу з метою визначення послідовності слів, яка передається цим сигналом. Поданий в дискретному вигляді мовленнєвий сигнал опишемо послідовністю $X_J = (x_1, \dots, x_J)$, елемент x_j якої є значення сигналу у відліку j . Довжина J різних реалізацій вхідного сигналу – різна. Для розпізнавання з реалізацій X_J створюється словник еталонних слів. Еталон слова словника описується послідовністю $E_h = (e_{h_1}, \dots, e_{h_{q_h}})$, де h – номер слова у словнику, q_h – довжина сигналу еталона слова, $h \in \{1, \dots, K\}$, K – кількість слів-еталонів.

Задача розпізнавання мовленнєвих сигналів полягає у знаходженні для сигналу X_J найбільш правдоподібного еталона E_h з усіх можливих. Оскільки в цій задачі установлюється подібність сигналів, то в процесі обчислення інтегральної міри подібності знаходиться максимум функції

$$G_h(X_J) = \max_{v \in \tau_h(J)} G(X_J, vE_h), \quad (1)$$

де $v \in \tau_h(J)$ – нелінійне розтягання початкового сигналу, $\tau_h(J)$ – множина можливих перетворень $v = (v_1, v_2, \dots, v_s, \dots, v_{q_h})$ початкового еталона E_h , які приводять до утворення різних еталонних сигналів заданого слова, $G(X_J, vE_h)$ – інтегральна міра подібності, $G_h(X_J)$ – значення інтегральної міри подібності [1].

Задачу (1) розв'язують шляхом порівняння еталона E_h із сигналом X_J одним із методів направленого перебору, наприклад методом динамічного програмування [1]. Для знаходження сигналу за номером h з усіх еталонних, якому відповідає вхідний сигнал, розв'язується повним перебором задача

$$h(X_J) = \arg \max_h G_h(X_J). \quad (2)$$

Аргументом цільової функції в обох задачах, згідно з [1], є вхідний сигнал.

Як видно з математичної моделі (1)–(2), задача розпізнавання мовленнєвих сигналів досить природно розділяється на дві підзадачі: перебір еталонних сигналів та порівняння еталонного та вхідного сигналів. Оскільки тут має місце перебір, то вона відноситься до задач комбінаторної оптимізації.

Нижче визначимо комбінаторну конфігурацію, яка є аргументом цільової функції в задачі розпізнавання та побудуємо її математичну модель як задачу комбінаторної оптимізації [2].

Математична постановка задачі розпізнавання мовленнєвих сигналів з використанням теорії комбінаторної оптимізації. Розглянемо задачу порівняння еталонного та вхідного сигналів

(задача (1)). Уведемо базову множину $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, де $a_l \in X_J$, $l = \overline{1, J}$, а $a_{J+i} \in E_h$, $i = \overline{1, q_h}$, $n = J + q_h$. Вхідні дані, якими є ваги між елементами $x_l \in X_J$ та $e_{h_i} \in E_h$, задамо несиметричною матрицею $C = \|c_{il}\|_{q_h \times J}$, номери стовпців якої збігаються з нумерацією елементів $x_l \in X_J$, а номери рядків – з нумерацією елементів $e_{h_i} \in E_h$, $i = \overline{1, q_h}$. Аналогічне представлення вхідних даних подано розгорнутим графом слова в [1]. Як описано в [1], при поелементному розпізнаванні мовленнєвого сигналу для елемента $x_l \in X_J$ знаходиться йому подібний $e_{h_i} \in E_h$. Оскільки з базової множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ вибираються по чергові по два елементи у строгому порядку, то отримана комбінаторна конфігурація є розміщення без повторень. Позначимо її $\mu^k \in M$, де M – їхня множина. Для визначення елементів a_j , що вибираються з бібліотеки еталонів на k -му варіанті розв'язку задачі, уведемо комбінаторну $(0,1)$ -матрицю $Q(\mu^k) = \|g_{ij}^k(\mu^k)\|_{q_h \times J}$. Якщо $g_{il}^k(\mu^k) = 1$, то з множини A вибрана пара (x_l, e_{h_i}) , в іншому разі – значення $g_{ij}^k(\mu^k) = 0$. Елементи матриці C подамо числовою функцією $\varphi(j) \big|_1^{n^*}$, а матриці $Q(\mu^k)$ – комбінаторною $\beta(f(j), \mu^k) \big|_1^{n^*}$, де $n^* = J \cdot q_h$.

Задача порівняння еталонного та вхідного мовленнєвих сигналів полягає в знаходженні такого розміщення без повторень $\mu^{k*} = (\mu_1^{k*}, \dots, \mu_q^{k*})$, для якого цільова функція

$$F(\mu^{k*}) = \max_{\mu^k \in M} \sum_{j=1}^{n^*} \varphi(j) \beta_j(f(j), \mu^k), \quad (3)$$

де $\sum_{j=1}^{n^*} \varphi(j) \beta_j(f(j), \mu^k)$ – інтегральна міра подібності, а $\varphi(j) = g_j^*(x_j, e_{h_i})$ – елементарна міра подібності, яка визначає

подібність між елементами еталонного та вхідного сигналів $q' = \min(J, q_h)$. Аргументом цільової функції задачі (1) є розміщення без повторень.

Розглянемо задачу (2). Позначимо $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ базову множину, де $a_1 \in X_J$, а $a_i \in E_{i-1}$, $i = 2, n$. В цій задачі як ваги між еталонним та вхідним сигналами виступають значення інтегральних мір подібності, одержаних за виразом (3) та представлених матрицею C' . Номера стовпців цієї матриці збігаються з номерами еталонних сигналів, розміщених у бібліотеці. Рядок у ній один та відповідає номеру один вхідного сигналу. Оскільки при порівнянні вхідного та еталонного сигналів з базової множини A вибираються два елементи, то утворений об'єкт є сполучення без повторень. Позначимо його $\mu^k \in M'$, де M' – їхня множина. Уведемо комбінаторну $(0,1)$ -матрицю $Q(\mu^k) = \|g_{li}^k(\mu^k)\|_{1 \times n}$. Якщо $g_{li}^k(\mu^k) = 1$, то з множини A вибрана пара (a_i, a_j) , в іншому разі – значення $g_{li}^k(\mu^k) = 0$.

Елементи матриці C' подамо числовою функцією $\varphi'(j) |_1^{n-1}$, а матриці $Q(\mu^k)$ – комбінаторною $\beta'(f'(j), \mu^k) |_1^{n-1}$.

Задача пошуку еталонного сигналу, який відповідає вхідному, полягає у знаходженні такого сполучення без повторень $\mu^{k*} = (a_i, a_t)$ із n елементів $a_t \in A$ по 2, $t \in \{1, \dots, n\}$, для якого значення заданої цільової функції було б найбільшим, тобто

$$F(\mu^{k*}) = \max_{\mu^k \in M} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi'(j) \beta_j'(f'(j), \mu^k), \quad (4)$$

де $\varphi'(j) = \sum_{j=1}^{n*} \varphi(j) \beta_j(f(j), \mu^k)$.

Гібридний алгоритм розпізнавання мовленнєвих сигналів. Виходячи з вищевикладеного, задача розпізнавання мовленнєвих сигналів розділяється на дві підзадачі, аргументом цільової функції в одній є розміщення без повторень, а у другій – сполучення без повторень. Як видно з постановки задачі (2), пошук еталонного

сигналу, подібного до вхідного, потребує повного перебору. Для розв'язання цієї задачі направленим перебором розглянемо підзадачу структуризації бібліотеки еталонних сигналів за певними ознаками. Упорядкуємо ці сигнали, що відповідають заданим словам, в алфавітному порядку за такою схемою.

1. З кожного бібліотечного сигналу виділимо сегмент постійної довжини q'' , який є початком сигналу еталонного слова (частина першої фонемі). Множину одержаних сегментів позначимо $\tilde{A} = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\tilde{n}}\}$, а множину слів у словнику позначимо $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Елементу $\tilde{a}_l \in \tilde{A}$ відповідає сегмент частини першої фонемі слова, якому відповідає елемент b_l словника.

2. Розв'язавши задачу розбиття множини \tilde{A} на підмножини (кластеризацію), об'єднаємо однорідні сегменти в одну підмножину $\rho_s^k \subset \rho^k$. Підмножина $\rho_s^k \subset \rho^k$ є підмножиною слів словника $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ з подібними початковими сегментами та ізоморфна підмножині $\rho_s^k \subset \rho^k$, $s \in \{1, \dots, \eta^k\}$, ρ^k, ρ'^k – кластери однорідних сегментів, η^k – кількість сегментів у ρ^k . Значення цільової функції в цій задачі обчислюється за виразом (3). Як і в задачі розпізнавання, в цьому випадку значення функції

$$\varphi(j) = \sum_{j=1}^{q''} g'_j(\tilde{a}_{js}, \tilde{a}_{jt}) \text{ є інтегральною мірою подібності, а } g'_j(\tilde{a}_{js}, \tilde{a}_{jt})$$

– елементарна міра подібності, яка встановлюється між сегментами $\tilde{a}_r, \tilde{a}_t \subset \tilde{A}$, $\tilde{a}_{jr} \in \tilde{a}_r$, $\tilde{a}_{jt} \in \tilde{a}_t$.

3. Кожній одержаній підмножині $\rho_s^k \subset \rho^k$ поставимо у відповідність еталон сегмента a'_j , який відповідає частині першої фонемі слова, що входить до $\rho_s^k \subset \rho^k$. Одержану множину сегментів позначимо $A' = \{a'_1, \dots, a'_{\eta^k}\}$. Аналогічно можна структурувати бібліотеку еталонних сигналів за другою, третьою фонемі, використавши як еталони множину сегментів $\tilde{A} = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\tilde{n}}\}$.

Маючи еталони сегментів $a_l' \in A'$, $l \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$ упорядкованих в алфавітному порядку задача (1)–(2) розв'язується таким чином. При пошуку еталонного сигналу у бібліотеці вирізаємо сегмент вхідного сигналу X_j що відповідає частині першої фонемі, довжиною q'' . Задачу (1) розв'язуємо з використанням відомих методів, наприклад, методу динамічного програмування [1]. При цьому порівнюється сегмент вхідного сигналу довжиною q'' з еталонними сегментами $a_l' \in A'$ структуризованої бібліотеки. Якщо значення функції (1) найбільше для підмножини $\rho_s^k \subset \rho^k$, то пошук вхідного слова проводиться у цій підмножині словника B за другою, третьою і т. д. фонемах.

Отже, задача розпізнавання мовленнєвих сигналів розділяється на три підзадачі, аргументом цільової функції в яких є комбінаторні конфігурації різних типів. Ця задача полягає в знаходженні таких комбінаторних конфігурацій $\rho^* \in \Theta$, $\mu^* \in M$, $\mu^* \in M'$, Θ – множина кластерів, для яких задана цільова функція набуває оптимального значення. Структуризація бібліотеки еталонних сигналів проводиться один раз. Для розпізнавання поточного вхідного сигналу організується ітераційний процес, на кожному кроці якого по черговому розв'язуються задачі (1)–(2).

Мультимножини та багатодикторне розпізнавання мовленнєвих сигналів. Мовленнєвий сигнал під дією певних чинників утворюється різноманітними комбінаціями елементів $\tilde{b} \in \tilde{B}$ активних та пасивних органів творення мови. Мовленнєві сигнали, що відповідають одному і тому ж слову, але вимовлені різними дикторами, відрізняються як частотою так і величиною амплітуди. Визначення подібності вхідного та еталонного сигналів у багатодикторних системах проводиться багатьма способами, наприклад [1]. Мовленнєвий сигнал моделюється вибіркою – розміщення з повтореннями з n^* елементів $\tilde{b}_s \in \tilde{B}$ по $\tilde{\eta}$, в якій ураховується порядок елементів, $s, \tilde{\eta} \in \{1, \dots, n^*\}$ [3]. Одне і те ж слово, повторене кілька разів одним і тим же диктором або різними

дикторами, відрізняється завдяки тому, що отримані розміщення з повтореннями містять різну кількість елементів мовленнєвого тракту. Звідси – нечіткість у вхідних даних.

Мовленнєвий сигнал (розміщення з повтореннями) подамо мультимножиною [3]. Вона формально визначається як пара (\tilde{B}, m) де $m: \tilde{B} \rightarrow N$ функція з \tilde{B} у множину N натуральних чисел, тобто кожному елементу множини \tilde{B} відповідає певне натуральне число, яке називається кратністю цього елемента. Мовленнєвий сигнал задамо функцією $f_t|_1^p = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, де f_t – значення амплітуди у відліку t сигналу. Проведемо його сегментацію на майже періодичні та неперіодичні відрізки. Поточний майже період розділимо на k відліків та опишемо мультимножиною, яку задамо основою $(f_t|_1^p, m)$, де p – величина, яка визначається експериментально та однакова для будь-якого відрізка сигналу. В t -му відліку повинно бути лише одне значення f_t . Еталон, за яким установлюється подібність майже періоду, моделюється аналогічно. Подібність визначаємо за виразом $|f_t - f_t'| \leq \varepsilon$ та $|m_t - m_t'| \leq \varepsilon'$, де f_t' – значення сигналу еталона у відліку t , m_t' – кратність елемента f_t' , ε , ε' – мінімальні величини, за якими встановлюється подібність вхідного та еталонного сигналів, визначаються експериментально.

Задача синтезу мовленнєвих сигналів. проводиться шляхом об'єднання квазіперіодів або ділянок сигналу, вибраних із бібліотеки, у фонему, що відповідають заданим звукам (відповідно буквам заданого тексту), з використанням певних правил. Майже періоди можуть створюватися штучно. Аргумент цільової функції в цій задачі відноситься до вибірок (розміщення з повтореннями). Множину бібліотечних елементів позначимо $A^* = \{a_1^*, \dots, a_n^{**}\}$, де a_i^* – елемент, що відповідає квазіперіоду або ділянці мовленнєвого сигналу. Подамо штучний сигнал заданого слова (речення) розміщенням з повторенням (кортежем) $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_n^k)$, де

$\mu_t^k = (a_{t1}^*, \dots, a_{t\zeta_t}^*)$ – фонема, а $a_{ti}^* \in A^*$ – t -й бібліотечний елемент фонему. Природний мовленнєвий сигнал заданого слова (речення) позначимо кортежем $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_{\eta^*}^*)$, де $\mu_s^* = (\mu_{s1}^*, \dots, \mu_{s\zeta_s^*}^*)$ – фонема, а μ_{si}^* – її елемент.

Задача синтезу мовленнєвих сигналів полягає у знаходженні такого розміщення з повтореннями $\mu^{k*} = (\mu_1^{k*}, \dots, \mu_{\eta}^{k*})$, для якого одержаний штучний мовленнєвий сигнал відповідав би природному його звучанню, тобто цільова функція

$$F(\mu^{k*}) = \max_{\mu^k \in M} \sum_{s=1}^{\eta^*} \sum_{j=1}^n \varphi(j) \beta_j(f(j), \mu^k), \text{ де } \varphi(j) = \sum_{i=1}^{q''} g_j(a_{ji}^*, \mu_{si}^*) -$$

інтегральна міра подібності, а $g_j(a_{ji}^*, \mu_{si}^*)$ – елементарна міра подібності, яка визначає подібність між штучними фонемами $\mu_t^k = (a_{t1}^*, \dots, a_{t\zeta_t}^*)$, утвореними з елементів $a_{ti}^* \in A^*$, та природними $\mu_s^* = (\mu_{s1}^*, \dots, \mu_{s\zeta_s^*}^*)$ заданого природного сигналу, $q'' = \min(\zeta_t, \zeta_s^*)$. Значення $\beta_j(f(j), \mu^k) = 1$, якщо фонема μ_t^k утворена з елемента $a_{ti}^* \in A^*$, та $\beta_j(f(j), \mu^k) = 0$ в іншому випадку.

Висновок. Як видно з викладеного, задачі розпізнавання та синтезу мовленнєвих сигналів моделюються в рамках теорії комбінаторної оптимізації. Аргументом цільової функції в них є не вхідний сигнал, а комбінаторні конфігурації різних типів. В цих задачах вони можуть бути і вхідними даними.

Література

1. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов / Т.К. Винцюк. – К.: Наукова думка, 1987. – 262 с.
2. Тимофієва Н.К. Лінійне цілочислове програмування та задачі комбінаторної оптимізації / Н.К. Тимофієва // УСиМ. – 2010. – № 1 – С.28 – 37.
3. Тимофієва Н.К. Використання мультимножин у багатодикторному розпізнаванні мовленнєвих сигналів / Н.К. Тимофієва // IX міжнародна науково-практична конференція “Математичне та

програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2011), тези доповідей, м. Дніпропетровськ, 23–25 листопада 2011 року/ – Дніпропетровськ, 2011. – С. 258-259.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОХКРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ, ЗАСНОВАНИЙ НА ВИДІЛЕННІ ОСНОВНОГО КРИТЕРІЮ

Турчина В.А.

vaturchina@mail.ru

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Исследование посвящено двухкритериальным параллельным упорядочениям. Построена математическая модель данной задачи, предложен метод её решения и алгоритм, реализующий этот метод.

The research deals the parallel sequencing with two criteria. Mathematical model was consider, the method of the solution was offered and the algorithm for the numerical realization of the method were developed.

В роботі розглядається метод розв'язання однієї з двохкритеріальних задач паралельного упорядкування, що були сформульовані в [1].

Метод головного критерію полягає в оптимізації основного часткового критерію. Відокремимо як основний другий критерій, який представляє собою максимальну перерву між роботами, що слідують одна за одною, тобто, в термінах задачі паралельного упорядкування, максимальне значення відстані між місцями вершин в упорядкуванні, знайдене по всім парам вершин, між якими існує дуга в графі G . Цей критерій приймаємо за основний або виключно важливий, на його основі будемо реалізовувати процедури оптимізації. Для другого критерію задамо гранично допустиме значення: будемо вимагати, щоб довжина упорядкування не перевищувала величини:

$$L = \max \left(\underline{L}, \left\lceil \frac{|V|}{h} \right\rceil \right) + \tilde{k}, \quad (1)$$

де \underline{l} – довжина критичного шляху в графі, що рахується за дугами, \tilde{k} – ціле додатне число, що обирається з практичних міркувань в залежності від графу G .

Отже замість вихідної двохкритеріальної задачі оптимізації в форматі даного підходу розв'язується скалярна задача оптимізації однієї функції (обраного основного часткового критерію) з побудованими обмеженнями.

Нехай $G = \{V, U\}$ – заданий ациклічний граф. Будемо будувати паралельне упорядкування наступним чином. Вважаємо всі місця в шуканому упорядкуванні порожніми. На кожному кроці в графі G шукаємо множину вершин I , що не мають вхідних дуг. Якщо їх кількість не перевищує заданої ширини упорядкування, то ставимо ці вершини на місце в упорядкуванні, що відповідає кроку алгоритму, на якому ми знаходимось. Якщо ж їх кількість перевищує ширину упорядкування, то оцінюємо для кожної з цих вершин значення довжини за умови видалення вершини, що розглядається, з графу G разом з її вихідними дугами. Нехай K – множина вершин з I , для яких оцінка довжини перевищує L . Видаляємо з розгляду на поточному кроці $\min(|I| - h, |K|)$ вершин з найбільшим значенням оцінки довжини. Кожній з вершин, що залишаються у розгляді, присвоюємо помітку, яка будується на основі місць вершин, з яких виходить дуга у вершину, що розглядається, у вже побудованій частині упорядкування, та місць вершин, з яких виходять дуги у вершини, до яких також виходять дуги з вершини, що розглядається, у вже побудованій частині упорядкування. Розташовуємо вершини у порядку незростання значення їх поміток, та ставимо перші h вершин на місце в упорядкуванні, що відповідає кроку алгоритму, на якому ми знаходимось. Якщо всі вершини розподілено, то упорядкування побудовано. Інакше видаляємо з графу обрані вершини та переходимо на наступний крок.

Розглянемо алгоритм описаного методу:

1. Всі місця в шуканому упорядкуванні S^* вважаємо порожніми, покладаємо $k = 1$.

2. В графі G шукаємо множину вершин I , що не мають вхідних дуг. Якщо їх кількість не перевищує заданої ширини упорядкування h , то ставимо ці вершини на k -те місце в упорядкуванні S^* . Якщо ж їх кількість перевищує h , то для кожної вершини $i \in I$ оцінюємо значення довжини за умови видалення вершини i з графу G разом з її вихідними дугами за формулою:

$$\tilde{l} = \max\left(\underline{l}, \left\lceil \frac{|V|}{h} \right\rceil\right) + k. \quad (2)$$

Нехай K – множина вершин з I , для яких оцінка довжини \tilde{l} перевищує L . Видаляємо з розгляду на поточному кроці $\min(|I| - h, |K|)$ вершин з найбільшим значенням оцінки довжини.

Для кожної з вершин, що залишилися у розгляді, визначаємо помітку наступним чином:

$$m^i = m_1^i + m_2^i, \quad (3)$$

де

$$m_1^i = \max_{j \in S[1] \cup \dots \cup S[k-1]: \{(j,i) \in U\}} d_j, \quad (4)$$

$$m_2^i = \max_{j \in S[1] \cup \dots \cup S[k-1], l: \{(j,l) \in U, (i,l) \in U\}} d_j, \quad (5)$$

де d_j – абсолютна різниця між k та номером місця, яке в упорядкуванні S^* займає вершина j . Розташовуємо вершини з множини I в порядку незростання їх поміток, та на k -те місце в упорядкуванні S^* ставимо перші h вершин.

3. Якщо всі вершини розподілено, то шукане оптимальне упорядкування побудовано, кінець алгоритму.

4. Видаляємо з графу обрані вершини разом з вихідними дугами.

5. Покладаємо $k = k + 1$ та переходимо на другий крок алгоритму.

Алгоритм програмно реалізований та протестований на реальних задачах, пов'язаних з складанням розкладу занять.

Література

1. Турчина В.А. Узагальнення задач паралельного упорядкування на випадок двох критеріїв/ В.А.Турчина, Н.О.Гранкіна// Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Тези доповідей.- Дн-ск., ДНУ.- С.235-236.

РОЗРОБКА МЕХАНІЗМУ ПРОСТОРУ ІМЕН ЕКСПЕРТНОЇ СИСТЕМИ “VINE”

В.Д. Хох Кіровоградський національний технічний університет

Для автоматизації проведення аудиту інформаційної безпеки, а саме аудиту на проникнення, було розроблено систему «Vine», одним із основних елементів якої є експертна система з продукційною моделлю представлення знань (ПМПЗ). Однією з проблем ПМПЗ є невелика кількість продукцій, яку можна ефективно використовувати при побудові рішень.

У сучасному світі зберігання особистої, банківської та ділової інформації стає, а в деяких галузях вже стало, невід'ємною, обов'язковою частиною життя, особистого та ділового. Питання забезпечення безпеки цієї інформації стає все більш актуальним, у тому числі і для нашої держави, де поступово впроваджують електронний документообіг. Для того щоб сформувані коректну та адекватну до поточних умов картину можливих загроз системи – формується документ, що декларує політику безпеки організації. Процес формування цього документу визначається стандартом ISO-27002, що прийнятий в Україні із ступенем сумісності MOD. Під час формування політики безпеки організації важливим

джерелом інформації є результати проведення аудитів інформаційної безпеки, порядок їх проведення визначено стандартами ISO-27001 та ISO-27002. Для часткової або повної автоматизації проведення аудиту інформаційної безпеки, а саме аудиту на проникнення, було розроблено систему «Vine», одним із основних елементів якої є експертна система з продукційною моделлю представлення знань (ПМПЗ).

Однією з проблем ПМПЗ є невелика кількість продукцій, яку можна ефективно використовувати при побудові рішень. Враховуючи область застосування розробленої системи було створено механізм простору імен. Він полягає у визначенні назв просторів імен фактів та продукцій, де кожний простір імен є підмножиною загальної множини продукцій. Сам простір імен визначає певні умови застосування цієї продукції, наприклад назву операційної системи, до якої можливо застосувати продукцію. У той же час, усім фактам – антецедентам продукції присвоюється той же простір імен. Таким чином, під час ініціалізації первинної фактологічної бази між фактами розподіляються назви просторів імен, а враховуючи те, що продукції можуть використовувати одні й ті ж факти, але бути в різних просторах імен – фактам може призначатися декілька просторів імен.

Також в розробленій системі передбачено визначення фактів-тригерів. Факти-тригери – це такі факти, які в процесі роботи системи можуть набувати значень, що відповідають назві певного простору імен (наприклад, версія програмного забезпечення), таким чином можливо автоматизувати та підвищити ефективність відбору продукцій з бази знань. У результаті, під час роботи системи спочатку відбувається ініціалізація первинної фактологічної бази, в якій визначаються усі простори імен, і те, які факти до цих просторів належать.

Система на основі результатів сканування визначає значення фактів, а користувачу доступна можливість корегування їх значення, а також додавання та видалення фактів з бази. Варто зауважити – користувач може створити абсолютно новий факт, якого немає серед антецедентів бази знань. Його можливо використати як факт-тригер, або ж вплинути на рівень

релевантності рішень. Можливість визначити певний факт як тригер, стосується і тих фактів, які визначені в базі знань як антецеденти. Таким чином, разом із набором фактів фактологічна база надає системі ще й список певних просторів імен, які вона використовує для відбору лише необхідних підмножин із загальної множини продукцій. Це дозволяє зменшити кількість застосовуваних продукцій, що й являється ціллю розробки цього механізму. У той же час, запропонований механізм дозволяє додати ті продукції, які семантично пов'язані з поточною задачею, зважаючи на те, що простори імен визначенні за певними характеристиками проблемної області експертної системи.

БУДОВА ОСНОВНИХ 4-РЕГУЛЯРНИХ ГАМІЛЬТОНОВО РОЗКЛАДНИХ ГРАФІВ

К. М. Шевченко

*Кіровоградський державний педагогічний університет
ім. В. Винниченка*

Аннотация. Описано строение графа, для каждой вершины которого подграф, порождённый её окружением, изоморфен графу $K_3 + K_1$. К этому множеству графов принадлежат все основные гамильтоново разложимые графы.

Abstract. The construction of the graph is described for each vertex of which the subgraph that is generated by its surroundings is isomorphic to the graph $K_3 + K_1$. All basic Hamilton decomposable graphs belong to this set of graphs.

Тут розглядаються лише 4-регулярні графи та деякі їх підграфи.

Відомо [1], що будь-який гамільтонowo розкладний граф H' порядку $v+1$ можна перетворити в гамільтонowo розкладний граф $H = \theta^{-1}(H', a)$ порядку v , якщо в H є хоч би одна вершина a така, що підграф, породжений її оточенням, [2] не ізоморфний графу $K_3 + K_1$. Граф H отримується з H' видаленням зірки з центром у

вершині a і приєднанням до вершин оточення вершини a паросполуки F розміру 2. Отже в кожній множині $R_{4,\theta}$ [1], яка складається з гамільтоново розкладних графів, графом найменшого порядку є такий граф, що для кожної його вершини підграф, породжений її оточенням, ізоморфний графу $K_3 + K_1$:

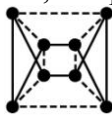


Такі графи в [1] названо основними гамільтоново розкладними.

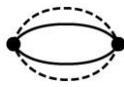
В наступній теоремі не вимагається, щоб графи були гамільтоново розкладними.

Теорема. Якщо для кожної вершини 4-регулярного графа H підграф, породжений її оточенням, ізоморфний графу $K_3 + K_1$, то кожна вершина графа H належить одному з його підграфів K_4 . Будь-які два різні підграфи K_4 не мають спільних вершин.

Отже, множина ребер описаного в теоремі графа H розпадається на два класи: до класу 1 належать усі ребра підграфів K_4 , до класу 2 – решта ребер графа H . З кожної з 4 вершин підграфа K_4 виходить по одному ребру з класу 2. Якщо всі 4 вершини кожного підграфа K_4 склеїти в одну, видаливши з графа H усі ребра класу 1, то знову отримаємо 4-регулярний граф. Якщо він гамільтоново розкладний, то і граф H гамільтоново розкладний. Але можуть утворитися кратні ребра. Так, наприклад, найменша з



описаних в [1] замкнених мережок H_1 : має 2 підграфи K_4 і кожне з 4 ребер класу 2 з'єднує вершину першого підграфа K_4 з вершиною другого. Якщо замінити кожен підграф K_4 вершиною,

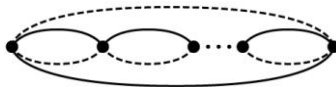


як описано вище, то отримаємо граф . Але можна в графі H_1 замінити вершиною лише один підграф K_4 , тоді отримується граф K_5 без кратних ребер. K_5 гамільтоново розкладний, тому і

граф H такий же. H_1 є основним гамільтоново розкладним графом найменшого порядку.

Зауваження. В графі H , описаному в теоремі, якщо він гамільтоново розкладний, не може бути двох різних підграфів K_4 , вершини яких з'єднані трьома різними ребрами з класу 2.

В замкненій мережці довільної довжини $4t$, про яку йдеться в [1], кожен два сусідні підграфи K_4 з'єднані двома ребрами з класу 2. Якщо замінити кожен підграф K_4 вершиною, як описано вище,



то отримаємо мультиграф

Але якщо замінити лише один підграф K_4 вершиною a , то потім можна побудувати граф $\theta^{-1}(H, a)$, який буде мережкою довжини $4(t-1)$. Продовжуючи аналогічно, зрештою отримаємо мережку H_1 порядку 8.

Література

1. Шевченко К. М. Множини $R_{4,t}$ гамільтоново розкладних графів, Матеріали 15-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 12–13 квітня 2013 р., м. Кіровоград.

2. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М., «Наука», 1990.

КВАДРАТНАЯ РАЗНОСТНАЯ РАЗМЕТКА НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРАФОВ

Шерман Зоя Александровна

sherman.zoya@rambler.ru

*Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины,
Киев, Украина*

Разметка графа – одна из популярных проблем в теории графов. Она заключается в назначении вершинам или ребрам графа целых чисел по некоторым условиям. Большинство разметок графа произошли из грациозной разметки и представлены в обзоре Гальяно [1]. Данная работа посвящена квадратной разностной разметке графа, которая впервые была введена в 2012 году Аджифа, Принси, Локеш и Ранжини [2]. Ее авторы доказали, что такие классы графов как цепи, звезды, циклы, дружественные графы, треугольные змеи имеют квадратную разностную разметку. Тармарадж и Сарасия [3-4] также проводили исследование в данной области и определили новые классы графов, допускающие квадратную разностную разметку. К ним относятся: веер F_n ; граф g_n ; серединные графы цепей и циклов; тотальные графы цепей. Кроме этого, авторы [3-4] доказали, что дизъюнктивное объединение таких классов графов как цепи, цепь и звезда, цепь и цикл, и др. имеют квадратную разностную разметку.

Под графом понимаем конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Пусть $G=(V, E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Будем считать, что $|V(G)|=p$, $|E(G)|=q$.

Функцию f называют *квадратной разностной разметкой* графа G с p вершинами, если f – биекция из $V(G)$ на множество $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ и индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u,v) = |[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$ является инъекцией из $E(G)$ в множество натуральных чисел. Граф, допускающий квадратную разностную разметку, называется *квадратным разностным графом* или *SD графом*.

Исследуются на наличие квадратной разностной разметки новые типы графов, полученных в результате дизъюнктивного объединения звезд и цепного соединения циклов.

Теорема 1. Дизъюнктивное объединение звезд K_{1,n_i} , где $i=1, 2, \dots, m$ допускает квадратную разностную разметку для любых натуральных m и n_i .

Теорема 2. Произвольное цепное соединение n копий цикла C_3 является квадратным разностным графом для любого натурального n .

Для иллюстрации теоремы 2, рассмотрим граф $G=3C_3$, представляющий собой цепное соединение трех копий цикла C_3 . Выполним разметку вершин этого графа, в соответствии с доказательством теоремы 2 (рис.1). Граф $G=3C_3$ является квадратным разностным графом.

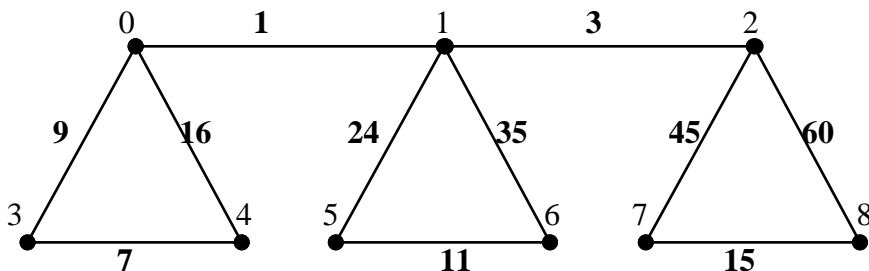


Рис.1. Квадратная разностная разметка цепного соединения $3C_3$

Литература

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling // The Electronic journal of Combinatorics. – 2014. – P. 1–384.
2. Ajitha V., Princy K.L., Lokesh V., Ranjini P.S. On square difference Graphs // International Journal of Mathematical Combinatorics. – 2012. – Vol.1, №1. – P. 31–40.
3. Tharmaraj T., Sarasija P.B. Square difference Labeling of Some Union Graphs // International Journal of Mathematical Archive. – 2013. – Vol.4, №8. – P. 183–186.
- Tharmaraj T., Sarasija P.B. Square difference Labeling for Certain Graphs // International Journal of Mathematics Trends and Technology. – 2014. – Vol.11, №11. – P. 81–88.

КЛІТИННІ АВТОМАТИ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ

Мелешко Є.В. (elismeleshko@gmail.com)

Якименко М.С. (mykola.yakymenko@gmail.com)

Кіровоградський національний технічний університет

Abstract. The work is devoted to using of cellular automata in physical modelling problems. The main types of cellular automata used for modelling in mechanics is reviewed. Approach of movable cellular automata is regarded in detail.

Клітинні автомати були вперше введені С.Уламом та Дж. фон Нейманом в 1940-х роках і набули популярності в 1970-х після створення Дж. Конуеєм гри «Життя». Сьогодні вони широко використовуються в задачах фізичного, екологічного моделювання, обробки інформації, у криптографії, проводяться спроби універсального моделювання фізичних явищ [1, 2], використовуючи ідею, що більш складні явища не завжди вимагають більш складних моделей. Особливо яскраво це наведено в [1], де на прикладі найпростіших 1-вимірних клітинних автоматів вказано можливість самоорганізації та складної поведінки систем.

Сучасне інтенсивне використання клітинних автоматів пов'язане із розвитком паралелелізму обчислень і дозволяє замість традиційних сіткових схем для розв'язання диференціальних рівнянь проводити пряме моделювання, задаючи різні правила. В [3] проводиться огляд різноманітних моделей клітинних автоматів для симуляції нелінійних та розривних процесів, де особливо яскраво проявляються переваги клітинних автоматів. Серед клітинних автоматів, що використовуються для моделювання середовищ зі складними властивостями виділяють наступні типи: «піщана купа» – моделювання лавин, дюн тощо; «гратковий газ» (lattice-gas) – гомогенна та гетерогенна гідродинаміка, термогідродинаміка, суспензії, процеси кристалізації та росту; «граткові зерна» (lattice-grain) – мультифазні середовища, фазові переходи; гібридні метод – гідратація цементоподібних матеріалів, метод рухливих скінченних автоматів для задач теорії деформівних тіл. Слід зазначити, що, наприклад, із моделі граткового газу можливо отримати рівняння Нав'є-Стокса

руху в'язкої рідини, розглядаючи рух частинок як зміну станів гексагональних клітинних автоматів.

Метод рухливих клітинних автоматів [4] дозволяє проводити дослідження на мезорівні, що включає розгляд як неперервних моделей суцільного середовища, так і моделювання окремих включень. Даний підхід може бути в нагоді для задач сипучих тіл, трибології, механіки композитів, пружно-пластичного деформування твердих тіл, механіки руйнування, задач, що включають інтенсивне пружно-пластичне перемішування. В задачах однорідних середовищ при відносно гладкому деформуванні добре працюють сіткові методи, проте у випадку більш складних середовищ (або процесів) доцільним є використання саме клітинних автоматів, так як можливо вибирати розмір клітинних автоматів відповідно до розмірів неоднорідностей. В такому випадку, при, можливому зменшенні строгості моделей, обчислення проводяться більш швидко, що в багатьох задачах механіки є актуальним і на сьогоднішній день. Даний метод є гібридним, так як клітинні автомати можуть змінювати своє положення, при цьому враховується стан пар автоматів – з'єднані або роз'єднані, в залежності від параметра перекриття сусідніх автоматів. Таким способом можна моделювати хімічний зв'язок між волокнами, поширення тріщин, властивості неоднорідних, пористих середовищ. Рух клітинних автоматів розглядається як рух твердих тіл згідно рівнянь Ньютона-Ейлера, що включають в себе як поступальний, так і обертальний рух клітинних автоматів, що дозволяє розглядати широкий клас середовищ із складними середовищами (як наприклад, контунуум Коссера). В цьому випадку, як і для ґраткового газу замість розгляду складних диференціальних рівнянь теорії пружності або пластичності, які при чисельному розв'язанні будуть дискретизовані відповідно до сітки, використовуються пряме моделювання.

Шляхи розвитку клітинних автоматів в задачах моделювання включають: вибір більш адекватних клітинних автоматів, покращення моделей і правильних методик вибору масштабів, підвищення ефективності розпаралелювання і перехід від

дрібнозернистого до крупнозернистого розпаралелювання. З іншого боку, перебір різних варіантів клітинних автоматів [1, 2], можливо, дозволить віднайти нові зв'язки між фізичними явищами та отримати більш прості способи їх опису.

Література

1. Wolfram S. A new kind of science. – Champaign, IL: Wolfram Media – 2002. – 1280 p.

2. Тоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов. – М.: Мир, 1991. – 285 с.

3. Deserale D., Dupont P., Hellou M., Kamali-Bernard S. Cellular Automata Models for Complex Matter // Parallel Computing Technologies: 9th International Conference, PaCT 2007, Pereslavl-Zalessky, Russia, September 3-7, 2007, Proceedings. – P. 385-400.

4. Psakhie S. G., Horie Y. et al. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure // Theoretical and applied fracture mechanics. – 2001. – Vol. 37. – №. 1. – P. 311-334.

ОБРАЩЕНИЕ ОДНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА

Коганов Л.М. (lenya_85@mail.ru)

*Научный Центр нелинейной волновой механики и технологии
РАН*

Аннотация. Даётся полное решение задачи, ранее представленное в виде развёрнутых тезисов [9] (см. также Реферативный Журнал «Математика» ВИНТИ РАН, рефераты 2006, 3В189 и 2007, 2В197), естественно возникшей в алгебро-геометрических рассуждениях последнего времени. Отметим, что настоящее решение, первое по хронологии, приводящее к явной формуле для коэффициента искомого степенного ряда, инициировало впоследствии ряд работ как-то: [15], [16], и, возможно также, в некоторой степени работу [13] (полный список цитируемых работ – в конце статьи).

0. В разделе 5.5.3 монографии [1]³ Звонкина-старшего и Ландо в связи с нуждами алгебраической геометрии был рассмотрен следующий степенной ряд

$$x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n \cdot (n-1)} = f(x) \quad (1)$$

и была фактически поставлена задача его обращения, причём были приведены первые 7 коэффициентов обратного к $f(x)$ ряда в окрестности нуля, оказавшиеся равным числам 1, 1, 2, 7, 34, 213, 1630, делённым на соответствующие факториалы.

Ниже мы даём общую формулу для коэффициента при $\frac{z^n}{n!}; n = 1, 2, \dots$ степенного ряда

$$f^{(-1)}(z) = g(z),$$

такого, что

$$f^{(-1)}(x) \circ f(x) = f \circ f^{(-1)}(x) \equiv x,$$

где кружком обозначена операция функциональной композиции (суперпозиции, подстановки «внутренней» функции на место аргумента «внешней» функции).

1. Сначала свернём в так называемый замкнутый вид ряд, стоящий слева в (1).

Имеем непосредственно⁴:

³ В значительно расширенном русском издании книги [2], соответствующий материал помещён в Замечании 4.5.3 на страницах 256 - 257.

⁴ Мы далее дважды используем маклореновское разложение функции $\ln(1+x)$ по степеням x при $-1 < x < +1$, т.е. так называемый ряд Меркатора: см. Проф. Angelo Genossi (Анджело Дженокки) «Дифференциальное исчисление и основы интегрального исчисления» - лекции, записанные и изданные Giuseppe Peano (Джузеппе Пеано) // Переводъ съ итальянскаго Н.С. Синеокова. – Киевъ – Перербургъ – Харьковъ : Южно-Русское Книгоиздательство Ф. А. Иогансона, 1903, см. №79, с.89 – 91; 381.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + x^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - x^4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = \\
&= x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \dots + \\
&\quad + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots = \\
&= x - x \cdot \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right] + \\
&+ x - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right] = \\
&= 2x - x \cdot \ln(1+x) - \ln(1+x) = \\
&= 2x - (x+1) \cdot \ln(1+x).
\end{aligned}$$

И, действительно, если

$$f(x) = 2x - (x+1) \cdot \ln(1+x),$$

(2)

то

$$f(0) = 0, \text{ поскольку } \ln 1 = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 - [(x+1) \cdot \ln(1+x)]' \\
&= 2 - \left[\ln(1+x) + (x+1) \cdot \frac{1}{1+x} \right], \\
&= 1 - \ln(1+x)
\end{aligned}$$

и $f'(0) = 1$;

$$f''(x) = (-1) \cdot (1+x)^{-1} = -\frac{1}{1+x},$$

и при $n \geq 2$

$$f^{(n)}(0) = [f''(x)]^{(n-2)} \Big|_{x=0} = (-1) \cdot \left[\frac{1}{1+x} \right]^{(n-2)} \Big|_{x=0} = (-1) \cdot (-1)^{(n-2)} \cdot (n-2)!$$

по теореме Маклорена для геометрического ряда.

Можно и непосредственно сразу:

$$\begin{aligned}
 \left. [f(x)]^{(n)} = [f''(x)]^{(n-2)} \right|_{x=0} &= \left. [(-1) \cdot (1+x)^{-1}]^{(n-2)} \right|_{x=0} = \\
 &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot [-(n-2)] \cdot (1+x)^{-1-(n-2)} \Big|_{x=0} = (-1)^{n-1} \cdot (n-2)!
 \end{aligned}$$

и при $n \geq 2$ коэффициент при x^n есть

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)}$$

что и завершает проверку свёрнутого, то есть выраженного через элементарные функции ряда в левой части (1).

1'. Можно предложить иной вывод (2) с помощью элементарной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и процедуры «отлова» констант.

Поскольку путём почленного дифференцирования мы имеем:

$$f''(x) = \left[x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n \cdot (n-1)} \right]' = -\frac{1}{1+x} \quad (*)$$

и (в силу маклореновского разложения)

$$f(0) = 0, f'(0) = 1,$$

то f может быть восстановлена по второй производной – правой части (*) – двукратной интеграцией с «отловом констант по дороге».

Имеем из (*) с учётом вышеприведённых начальных данных:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\int \frac{dx}{1+x} + c_1 = \\
 &= -\ln|1+x| + c_1 = -\ln(1+x) + c_1,
 \end{aligned}$$

поскольку при достаточно малых по абсолютной величине значений x , заведомо таких, что $-1 < x < 1$, имеем $|1+x| = 1+x$.

Подставляя в обе части $x = 0$ и сравнивая с начальными данными, имеем:

$$1 = f'(0) = -\ln(1+0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Далее,

$$f(x) = \int [-\ln(1+x) + 1] \cdot dx + c_0.$$

Но, интегрируя по частям, имеем:

$$\begin{aligned} & \int \ln(1+x) \cdot d(1+x) = \\ &= (1+x) \cdot [\ln(1+x)] - \int (1+x) \cdot d[\ln(1+x)] = \\ &= (1+x) \cdot [\ln(1+x)] - \int \frac{1+x}{(1+x)} \cdot dx = \\ &= [(1+x) \cdot \ln(1+x) - x], \end{aligned}$$

и, вставляя в предыдущее выражение, имеем:

$$f(x) = -(1+x) \cdot \ln(1+x) + x + x + c_0.$$

Отметим, что оба раза под символом неопределённого интеграла мы имели в виду определённую самую простую первообразную, как это принято в теории дифференциальных уравнений.

Полагая $x=0$ в последнем выражении, получаем в силу начальных данных:

$$0 = -(1+0) \cdot \ln(1+0) + 2 \cdot 0 + c_0,$$

т.е. $c_0 = 0$, и окончательно

$$f(x) = 2x - (x+1) \cdot \ln(1+x),$$

что уже было нами установлено в пункте 1.

2. Для обращения $f = f(x)$ как маклореновского ряда – элемента с центром круга сходимости в нуле из моногенной по Вейерштрассу системы – рассмотрим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} t(z) &\stackrel{\text{def}}{=} f(e^z - 1) = [2x - (1+x) \cdot \ln(1+x)] \Bigg|_{x=e^z-1} = \\ &= 2 \cdot (e^z - 1) - e^z \cdot z. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим, кроме того,

$$\varphi(z) \stackrel{def}{=} e^z - 1.$$

Тогда величина τ , обратная к t в окрестности нуля по z , то есть такая, что

$$t(\tau(z)) = \tau(t(z)) \equiv z$$

может быть представлена как

$$\tau = \varphi^{\langle -1 \rangle} \circ f^{\langle -1 \rangle}$$

согласно простейшему групповому тождеству

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}.$$

В данном случае группа есть группа обратимых степенных рядов без свободного члена и с *заведомо ненулевыми первыми коэффициентами* (при первой степени переменной в разложении) относительно операции подстановки ряда в ряд – функциональной суперпозиции.

Поэтому

$$\left. \varphi \circ \tau = (e^x - 1) \right|_{x = \tau(z)} \quad (4)$$

и есть по ассоциативности

$$\varphi \circ \varphi^{\langle -1 \rangle} \circ f^{\langle -1 \rangle} = f^{\langle -1 \rangle},$$

то есть искомая функция.

В свете (4) согласно разложению Бюрмана – Лагранжа [3; часть I, гл. VII, §1, формула (6) на с. 184] в ряд по степеням переменной z имеем:

$$\varphi(\tau(z)) = \varphi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \left\{ D_z^{n-1} \left[\varphi'(z) \cdot \left(\frac{z}{t(z)} \right)^n \right] \right\} \Big|_{z=0},$$

и, поскольку

$$\left. \varphi(0) = e^z - 1 \right|_{z=0} = 0,$$

то нам следует найти в общем виде как функцию от $n; n \geq 1$ значение

$$\left\{ D_z^{n-1} \left[\varphi'(z) \cdot \left(\frac{z}{t(z)} \right)^n \right] \right\} \Big|_{z=0}$$

или, что - то же самое, коэффициент при $z^{n-1}/(n-1)!$ (мы будем в дальнейшем обозначать как $Coef_{z^{n-1}/(n-1)!}$) в маклореновском разложении квадратных скобок.

3. Сразу заметим, что

$$\varphi'(z) = (e^z - 1)' = e^z$$

а выражение, служащее основанием n -й степени преобразуем к виду, удобному для развёртывания в биномиальный ряд.

Имеем:

$$\begin{aligned} t(z) &= 2(e^z - 1) - z \cdot e^z &= 2(e^z - 1 - z) + 2z - z \cdot e^z \\ & &= 2(e^z - 1 - z) + z \cdot (2 - e^z) = , \\ & &= 2(e^z - 1 - z) + z \cdot [1 - (e^z - 1)] \end{aligned}$$

и окончательно

$$\frac{z}{t(z)} = \frac{1}{1 - \left[(e^z - 1) - 2 \cdot \left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right) \right]},$$

где, как и выше, $e^z - 1 = \varphi(z)$.

Положим, кроме того,

$$\frac{e^z - 1 - z}{z} \stackrel{def}{=} \psi(z)$$

(5)

для облегчения дальнейших выкладок.

4. Предварительно заметим, что если

$$a_n = Coef_{z^n/n!} \left(\dots + \frac{a_n}{n!} \cdot z^n + \dots \right),$$

то

$$n! \cdot \text{Coef}_{z^n} \left(\dots + \frac{a_n}{n!} \cdot z^n + \dots \right) = n! \cdot \frac{a_n}{n!} = a_n.$$

Иными словами, мы можем умножить всё выражение на $n!$ и взять не тэйлоровский, точнее, маклореновский коэффициент при взвешенной степени $z^n/n!$, пронормированной факториалом, а оперировать «чистым» коэффициентом степенного ряда.

Используя это обстоятельство, имеем:

$$\begin{aligned} & \left\{ D_z^{n-1} \left[e^z \cdot \left(\frac{1}{1 - (\varphi(z) - 2 \cdot \psi(z))} \right)^n \right] \right\} \Big|_{z=0} = \\ & = \text{Coef}_{z^{n-1}/(n-1)!} \left[e^z \cdot \left(\frac{1}{1 - (\varphi(z) - 2 \cdot \psi(z))} \right)^n \right] = \\ & = (n-1)! \cdot \text{Coef}_{z^{n-1}} \left[e^z \cdot \left(\frac{1}{1 - (\varphi(z) - 2 \cdot \psi(z))} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, нам нужно развернуть в степенной ряд по z выражение в квадратных скобках.

5. С этой целью воспользуемся биномиальным разложением (по Ньютону) с показателем $(-n)$.

По теореме Тэйлора

$$(1-x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot (-1)^k \cdot \underbrace{(\alpha-0) \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot [\alpha-(k-1)]}_{k \text{ сомножителей}}.$$

Полагая $\alpha = -n$, имеем:

$$\begin{aligned} (1-x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot (-1)^k \cdot \underbrace{(-n) \cdot (-n-1) \cdot \dots \cdot [-n-(k-1)]}_{k \text{ сомножителей}} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \underbrace{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}_{k \text{ сомножителей}}. \end{aligned}$$

В последнем выражении полагая

$$x = \varphi(z) - 2 \cdot \psi(z),$$

получаем:

$$\begin{aligned} & \left. (1-x)^{-n} \right|_{x=\varphi(z)-2\cdot\psi(z)} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!} \cdot \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} \cdot [\varphi(z)]^q \cdot (-1)^{k-q} \cdot 2^{k-q} \cdot [\psi(z)]^{k-q} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1) \cdot \frac{1}{k!} \cdot \sum_{q=0}^k k! \cdot \frac{[\varphi(z)]^q}{q!} \cdot (-1)^{k-q} \cdot 2^{k-q} \cdot \frac{[\psi(z)]^{k-q}}{(k-q)!}. \end{aligned} \quad (6)$$

6. Хорошо известно [4; Гл. 2, упр. 14 (а), с.54 – 55; Гл. 5, с. 111], [5], [6; Опр.1.4 с), с. 10 - 11], что

$$\frac{[\varphi(z)]^q}{q!} = \frac{(e^z - 1)^q}{q!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{S(l, q)}{l!} \cdot z^l \quad (7)$$

(можно суммировать, начиная с $l=q$), где $\{S(l, q)\}_{l \geq 0, q \geq 0}$ -

порождаемая последовательность Стирлинга II-го рода с порождающей $\varphi(z) = e^z - 1$. Для этой двухиндексной последовательности соотношение (7) при $q=0, 1, 2, \dots$ может служить исчерпывающим определением.

Продифференцируем обе части (7), имеем:

$$\frac{(e^z - 1)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot e^z = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{S(l+1, q)}{l!} \cdot z^l.$$

С другой стороны (при $q \geq 1$):

$$\begin{aligned} & \frac{(e^z - 1)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot [(e^z - 1) + 1] = \\ &= \frac{(e^z - 1)^q}{q!} \cdot q + \frac{(e^z - 1)^{q-1}}{(q-1)!}, \end{aligned}$$

откуда сравнением коэффициентов при $z^l/l!$ получаем основную рекуррентность

$$S(l+1, q) = q \cdot S(l, q) + S(l, q-1), l \geq q \geq 1, \quad (8)$$

допускающую следующую каноническую комбинаторную интерпретацию.

Пусть мы имеем разбиение множества $[l+1] = \overset{\text{def}}{\{1, \dots, l, l+1\}}$ на q непустых блоков-подмножеств, дающих в дизъюнктом объединении всё множество $[l+1]$.

Тогда либо элемент $l+1$ может составлять одноэлементный блок – число подобных разбиений равно второму слагаемому в (8) справа, либо может быть помещён q способами (присоединён) в один из q имеющихся блоков общей базы – множества $[l]$, что соответствует по правилу произведения первому слагаемому.

Применённое справа в (8) правило суммы завершает интерпретацию основной рекуррентности для последовательности Стирлинга II-го рода, и эта рекуррентность с учётом естественных начальных и граничных условий есть основа формирования соответствующей таблицы [4; с.62, табл.2].

7. Аналогично рассмотрим порождающую

$$\psi(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z} = \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \dots \quad (9)$$

и её последовательные «разделённые», «взвешенные» степени, определяющие двухиндексную порождаемую

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n, q) \cdot \frac{z^n}{n!} = \frac{[\psi(z)]^q}{q!}; q = 0, 1, \dots \quad (10)$$

В целях облегчения дальнейшего изложения установим ряд свойств порождаемой $\{P(n, q)\}_{\substack{n \geq 0 \\ q \geq 0}}$.

A.

$$P(n+1, q+1) = \frac{1}{(n+2) \cdot (q+1)} \cdot \sum_{k=q}^n \binom{n+2}{k} \cdot P(k, q); \quad (11)$$

где $q \geq 0, n \geq q$, а суммирование в силу известных свойств порождаемых двухиндексных последовательностей [6] можно начинать с $k = q$.

Доказательство (11). Непосредственно из (9) и (10) имеем:

$$\begin{aligned} P(n+1, q+1) &= \text{Coef}_{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}} \left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right)^{q+1} / (q+1)! = \\ &= (n+1)! \cdot \text{Coef}_{z^{n+1}} \frac{1}{q+1} \cdot \left[\frac{\left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right)^q}{q!} \right] \cdot \left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right) = \\ &= \frac{(n+1)!}{q+1} \cdot \text{Coef}_{z^{n+1}} \left(\sum_{n=q}^{\infty} \frac{P(n, q)}{n!} \cdot z^n \right) \times \left(\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \frac{z^{n+1}}{(n+2)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{(n+1)!}{q+1} \cdot \sum_{k=q}^n \frac{P(k, q)}{k!} \cdot \frac{1}{[(n+1-k)+1]!} = \\ &= \frac{1}{(n+2) \cdot (q+1)} \cdot \sum_{k=q}^n \frac{(n+2)!}{k! \cdot [(n+2)-k]!} \cdot P(k, q); q \geq 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно (11).

В. Выразим общий член $P(m, q)$ через члены последовательности Стирлинга II-го рода, определяемой посредством (7). Имеет место представление:

$$P(m, q) = \frac{m!}{(m+q)!} \cdot \sum_{p=0}^q \binom{m+q}{m+p} \cdot (-1)^{q-p} \cdot S(m+p, p); m \geq q \geq 0. \quad (12)$$

Доказательство (12). Последовательно имеем:

$$\begin{aligned}
P(m, q) &= \text{Coef}_{\frac{z^m}{m!}} \left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right)^q / q! = \\
&= \frac{m!}{q!} \cdot \text{Coef}_{z^m} \left[\left(\frac{e^z - 1}{z} \right) - 1 \right]^q = \\
&= \frac{m!}{q!} \cdot \text{Coef}_{z^m} \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} \cdot \frac{(e^z - 1)^p}{z^p} \cdot (-1)^{q-p} = \\
&= \frac{m!}{q!} \cdot \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} \cdot \text{Coef}_{z^m} \frac{(e^z - 1)^p}{z^p} \cdot (-1)^{q-p} = \\
&= \frac{m!}{q!} \cdot \sum_{p=0}^q \frac{q!}{p! (q-p)!} \cdot (-1)^{q-p} \cdot \text{Coef}_{z^{m+p}} (e^z - 1)^p = \\
&= \frac{m!}{(m+q)!} \cdot \sum_{p=0}^q \frac{(m+q)!}{(q-p)!} \cdot (-1)^{q-p} \cdot \text{Coef}_{z^{m+p}} \frac{(e^z - 1)^p}{p!} = \\
&= \frac{m!}{(m+q)!} \cdot \sum_{p=0}^q \frac{(m+q)!}{(q-p)!} \cdot (-1)^{q-p} \cdot \frac{S(m+p, p)}{(m+p)!},
\end{aligned}$$

что является иной формой записи соотношения (12), как и требовалось.

С. В качестве отступления докажем два тождества сравнительно недавно установленные проф. В.С. Шевелёвым (Беэр-Шеева, Израиль), по-видимому, на тех же путях, что и ниже, одно из которых предлагалось в качестве задачи читателям журнала «Квант» [7; Задача 2, решение сознательно отсутствует].

Пусть, как и на протяжении всего изложения, последовательность Стирлинга II-го рода есть порождаемая с порождающей $\varphi(z) = e^z - 1$. Тогда её квазиортогональ — последовательность Стирлинга I-го рода — есть порождаемая с порождающей $\varphi^{(-1)}(z) = \ln(1+z)$, где под символом $\ln(1+z)$ понимается главная ветвь логарифмической зависимости в окрестности $z=0$.

Общий член такой порождаемой обозначается по Риордану посредством $s(n, k)$.

В указанных обозначениях при $m \geq 1$ имеют место соотношения В.С. Шевелёва, а именно:

$$\sum_{p=1}^m \binom{2m}{m-p} \cdot (-1)^{m-p} \cdot S(m+p, p) = (2m-1)!!; \quad (13)$$

$$\sum_{p=1}^m \binom{2m}{m-p} \cdot (-1)^p \cdot s(m+p, p) = (2m-1)!! , \quad (14)$$

причём первое из этих соотношений по сути дела неявно содержится в [8; первое соотношение на с.13].

Доказательства (13) и (14). Докажем соотношение (13).

Согласно определяющему соотношению (10), где вместо q мы поставим m , имеем:

$$\frac{P(m, m)}{m!} = \text{Coef}_{z^m} \left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right)^m \bigg/ m! .$$

И, так как

$$\frac{e^z - 1 - z}{z} = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \dots ,$$

то этот коэффициент при степени с наименьшим показателем равен $\frac{1}{2^m \cdot m!}$.

Полагая в (12) $q = m$, деля на $m!$ и умножая обе части на $(m+q)! = (m+m)! = (2 \cdot m)!$, получаем, что после такого преобразования правая часть (12) совпадает с левой частью (13) и равна:

$$\begin{aligned} \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m}{2^m \cdot m!} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot m}{2^m \cdot m!} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{1} , \end{aligned}$$

что и требовалось.

Аналогично, применяя биномиальную теорему к выражению

$$\left(\frac{\ln(1+z) - z}{z} \right)^m \Big/ m! = \frac{1}{m!} \cdot \left[\left(\frac{\ln(1+z)}{z} \right) - 1 \right]^m,$$

учитывая, что

$$\left[\frac{\ln(1+z) - z}{z} \right] = -\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots,$$

действуя согласно пункту **В** и вычисляя в итоге коэффициент при z^m вышеприведённой разделённой степени, получим второе тождество В.С. Шевелёва (14).

Д. Ключевым моментом будет являться представление общего члена $P(n, k)$ в виде соответствующего члена перенормированной присоединённой последовательности Стирлинга II-го рода со следующей порождающей (порядка 2):

$$\varphi_2(z) = e^z - 1 - z$$

и определяющим соотношением

$$\frac{(e^z - 1 - z)^q}{q!} = \sum_{n=q}^{\infty} S_2(n, q) \cdot \frac{z^n}{n!}. \quad (15)$$

Исходя из (15), установим предварительно основную рекуррентность для двухиндексной порождаемой второго порядка – присоединённой последовательности Стирлинга II-го рода:

$$S_2(n+1, k) = k \cdot S_2(n, k) + n \cdot S_2(n-1, k-1); n \geq k \geq 1. \quad (16)$$

Доказательство (16). Дифференцируя обе части определяющего соотношения (15), причём правую часть – почленно, имеем, переставляя части,

$$\sum_{n=q}^{\infty} \frac{S_2(n+1, q)}{n!} \cdot z^n = \left[\frac{(e^z - 1 - z)^q}{q!} \right]' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(e^z - 1 - z)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot (e^z - 1) = \\
&= \frac{(e^z - 1 - z)^{q-1}}{(q-1)!} \cdot [(e^z - 1 - z) + z] = \\
&= \frac{(e^z - 1 - z)^q}{q!} \cdot q + z \cdot \frac{(e^z - 1 - z)^{q-1}}{(q-1)!} = \\
&= \sum_{n=q}^{\infty} \frac{S_2(n, q) \cdot q}{n!} \cdot z^n + \sum_{n=q}^{\infty} S_2(n-1, q-1) \cdot z \cdot \frac{z^{n-1}}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

откуда путём сравнения коэффициентов при $z^n/n!$ в исходном и полученном выражениях вытекает основная рекуррентность (16) с заменой q на k для присоединённой 2-го порядка последовательности Стирлинга II-го рода, с помощью которой (рекуррентности) формируется необходимая для вычисления таблица [4; стр.92, табл. 3, где $b(n, k) \equiv S_2(n, k)$ - ср. с нашим соотношением (16) формулу (33) на с. 94 в том же источнике], и которая может быть проинтерпретирована аналогично основной рекуррентности (8) для двухиндексной первого порядка порождаемой последовательности Стирлинга II-го рода.

С этой целью рассмотрим систему Δ_{n+1} разбиений множества $[n+1] = \{1, \dots, n, n+1\}$ на блоки, мощности каждого из которых не менее 2-х (отсутствуют так называемые синглетонные, т.е. одноэлементные блоки мощности 1). Система Δ_{n+1} строится из систем Δ_n и Δ_{n-1} следующим образом.

Либо элемент $n+1$ добавляется в один (любой) из блоков любого разбиения системы Δ_n , причём ранее в этом блоке имелось не менее 2-х элементов, и число таких разбиений по правилу произведения есть первое слагаемое правой части (16).

Либо элемент $n+1$ «спаривается», образуя двухэлементный блок с любым из элементов множества $[n] = \{1, \dots, n\}$, а оставшиеся после выбора (который, разумеется, осуществим в точности n

способами) элементы разбиваются на не менее чем двухэлементные блоки с числом блоков, равным в точности $k-1$ всеми возможными $S_2(n-1, k-1)$ способами. По правилу произведения получаем второе слагаемое правой части (16), после чего правило суммы даёт всю правую часть (16). Что в итоге и завершает интерпретацию.

Примечание. Французский математик Луи Комтэ (Louis Comtet) в своей монографии [5; Ch.5, Ex. 7, pp.156 – 157] приводит порождаемую порядка r ; $r \geq 1$ в принятой нами терминологии присоединённую последовательность Стирлинга порядка r с порождающей

$$\varphi_r(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2!} - \dots - \frac{z^{r-1}}{(r-1)!}$$

и обобщающее одновременно (8) и (16) соотношение

$$S_r(n+1, k) = k \cdot S_r(n, k) + \binom{n}{r-1} \cdot S_r(n-(r-1), k-1); r \geq 1, n \geq r \cdot k, k \geq 1, \quad (17)$$

при $r=1$ переходящее в (8), а при $r=2$ - в (16). Разумеется, доказательство предполагаемое Комтэ (речь идёт, повторяем, о разделе упражнений без каких-либо доказательств), совершенно аналогично интерпретации, предложенной в нашем тексте для (16).

Приведём для полноты картины краткие рассуждения [9; с. 171, предпоследний абзац перед списком литературы], устанавливающие соотношение (17) в полной общности.

Сразу отметим, что в нашем случае любой блок разбиения множества $[n+1] = \{1, \dots, n, n+1\}$ на ровно k блоков содержит не менее r элементов. При этом элемент $n+1$ может либо k способами войти в один из k блоков разбиения $[n] = \{1, \dots, n\}$, причём до вхождения $n+1$ в этот блок находилось не менее чем r элементов, а после вхождения $n+1$ этот блок будет содержать не менее $r+1$ элементов. Либо с помощью элемента $n+1$ можно образовать в точности r -элементный блок присоединением любого $(r-1)$ -подмножества из $[n]$ и разбиением дополнения, состоящего

из $n - (r - 1)$ элементов, в точности на $k - 1$ не менее чем r -элементных блоков.

На следующей странице 58 указанной монографии (часть II) Комтэ приводит таблицу значений $S_2(n, k)$ при $n = 1, \dots, 18$ и $k = 1, \dots, 9$, ибо, поскольку каждый из k блоков имеет по меньшей мере 2 элемента, то $k \leq \frac{n}{2}$, и, так как значения параметра k суть

целые числа, то $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Ещё раз отметим, что именно основные соотношения (8) и (16), являющиеся в силу сказанного специализациями вышеприведённой формулы Комтэ (17), служат основой для построения соответствующих таблиц [4; Гл. 2, с. 62, табл 2 – особо отметим, что имеется опечатка, а именно: на пересечении 10-й строки и 7-го столбца должно стоять число 5880, а не 5580⁵; с. 92, табл 3] также как основная рекуррентность для биномиальных коэффициентов служит, разумеется, вкупе с начальными и граничными условиями основой для построения Паскалева треугольника.

Именно эти таблицы, построенные по уже доказанным и проинтерпретированным рекуррентностям (8) и (16) будут служить основным вычислительным средством в свете следующего предложения.

Е. Последовательность с общим членом $P(n, q)$ есть результат перенормировки $S_2(n, q)$ с весьма простым нормирующим множителем факториального типа.

Имеет место:

⁵ А. Марковъ. Исчисленіе конечныхъ разностей. Второе изданіе. Одесса: Mathesis, 1910 (1911 по обложке), стр. 35, после транспонирования строк и столбцов.

$$\frac{P(n,k)}{n!} = \frac{S_2(n+q,q)}{(n+q)!}; n \geq q \geq 0. \quad (18)$$

Доказательство (18). Непосредственно из определяющих соотношений (9) – (10) и (15) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{P(n,q)}{n!} &= \text{Coef}_{z^n} \left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right)^q / q! = \\ &= \text{Coef}_{z^n} \frac{(e^z - 1 - z)^q}{z^q} / q! = \text{Coef}_{z^{n+q}} (e^z - 1 - z)^q / q! = \\ &= \text{Coef}_{z^{n+q}} \sum_{m=0}^{\infty} S_2(m,q) \cdot \frac{z^m}{m!} = \frac{S_2(n+q,q)}{(n+q)!}, \end{aligned}$$

что совпадает с правой частью доказываемого соотношения (18).

8. Резюмируя изложенное выше, приходим к теореме.

Теорема. Коэффициент при $z^n/n!$; $n = 1, 2, \dots$ разложения в ряд по переменной z функции

$$f^{(-1)}(z) = (e^y - 1) \Big|_{y=\tau(z)}, \quad (19)$$

где $\tau = \tau(z)$ есть функция, обратная в достаточно малой окрестности нуля к функции $t(z) = 2 \cdot (e^z - 1) - e^z \cdot z$ (при этом $f^{(-1)}(z)$ обратна к функции $f(z) = 2z - (z+1) \cdot \ln(1+z)$), может быть явно выражен через известные последовательности, а именно: стирлингову II-го рода (и порядка 1) и присоединённую порядка 2 стирлингову двухиндексную последовательность также II-го рода.

Этот коэффициент даётся выражением:

$$1 + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (n+k-1)! \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\min(l,k)} \frac{S(l+1, q+1)}{l!} \times (-1)^{k-q} \cdot 2^{k-q} \times \frac{S_2(n-1-l+(k-q), k-q)}{[n-1-l+(k-q)]!}; n \geq 3$$

.

$$(20)$$

При $n=1,2$ внешняя сумма не содержит слагаемых, является «пустой» и принимается как обычно равной нулю.

Кроме того, сразу отметим, что общее слагаемое тройной (троекратной) суммы в (20) целозначно. И действительно, группируя факториальные множители в числителе и в знаменателях, приходим к выражению:

$$\begin{aligned} \frac{(n+k-1)!}{l! \cdot [n-1-l+(k-q)]!} &= \frac{[(n-1)+(k-q)+q]!}{l! \cdot [(n-1)+(k-q)-l]!} = \frac{[(n-1)+(k-q)]!}{l! \cdot [(n-1)+(k-q)-l]!} \cdot \frac{[(n-1)+(k-q)+q]!}{[(n-1)+(k-q)]!} = \\ &= \binom{(n-1)+(k-q)}{l} \cdot \frac{[(n-1)+(k-q)+q]!}{[(n-1)+(k-q)]!}. \end{aligned}$$

Посему выражение в (20) – целозначное.

Доказательство теоремы. Из соотношения (6) раздела 5 в соответствии с последним соотношением в окончании раздела 4 настоящего текста имеем в качестве дополнительного для $(n-1)!$ множителя из указанного соотношения:

$$Coef_{z^{n-1}} \left[e^z + \sum_{k=1}^{\infty} n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1) \sum_{q=0}^k e^z \cdot \frac{[\varphi(z)]^q}{q!} \cdot (-1)^{k-q} \cdot 2^{k-q} \cdot \frac{[\psi(z)]^{k-q}}{(k-q)!} \right]$$

.

И в соответствии с первым соотношением после формулы (7), а также в силу определяющего соотношения (10), продолжая выкладки, получим:

$$Coef_{z^{n-1}} \left[e^z + \sum_{k=1}^{\infty} n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1) \times \sum_{q=0}^k (-1)^{k-q} \cdot 2^{k-q} \cdot \left(\sum_{l=q}^{\infty} \frac{S(l+1, q+1)}{l!} \cdot z^q \right) \times \left(\sum_{r=k-q}^{\infty} \frac{P(r, k-q)}{r!} \cdot z^r \right) \right]$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} \varphi(z) - 2 \cdot \psi(z) &= (e^z - 1) - 2 \cdot \left(\frac{e^z - 1 - z}{z} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{1!} \cdot z + \frac{1}{2!} \cdot z^2 + \frac{1}{3!} \cdot z^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot z^n + \dots \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2!} \cdot z + \frac{1}{3!} \cdot z^2 + \frac{1}{4!} \cdot z^3 + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \cdot z^n + \dots \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3!} \cdot z^2 + \frac{2}{4!} \cdot z^3 + \dots + \frac{n-1}{(n+1)!} \cdot z^n + \dots$$

есть ряд с общим членом

$$\left(\frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} \right) \cdot z^n = \frac{n-1}{(n+1)!} \cdot z^n; n \geq 2,$$

начинающийся с члена $\frac{1}{3!} \cdot z^2$, т.е. имеющий нуль $z=0$ кратности (порядка) 2, то из неравенства $2k \leq n-1$ следует, что $k \leq \frac{n-1}{2}$, и, поскольку k – целое, то $k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Следовательно, в явном выражении коэффициента при z^{n-1} мы можем ограничить верхний предел суммирования по индексу k .

В соответствии со сказанным выше имеем:

$$\begin{aligned} & \left[\text{Coef}_{z^{n-1}} e^z \right] + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1) \times \sum_{q=0}^k \sum_{l=q}^{n-1} \frac{S(l+1, q+1)}{l!} \cdot (-1)^{k-q} \cdot 2^{k-q} \cdot \frac{P(n-1-l, k-q)}{(n-1-l)!} = \\ & = \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1) \times \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\min(l, k)} \frac{S(l+1, q+1)}{l!} \cdot (-1)^{k-q} \cdot 2^{k-q} \cdot \frac{P(n-1-l, k-q)}{(n-1-l)!}; n \geq 3 \end{aligned}$$

в полном соответствии с содержанием раздела 6 и формулой (10).

Умножая, согласно разделу 4, всё последнее выражение на $(n-1)!$, используя (18), приходим к (20), что и завершает доказательство, и, как следствие, решение поставленной перед нами задачи обращения степенного ряда (1).

Что нам и требовалось.

9. Примечание.

А. Немецкий математик Дон Загир (Don Zagier – иногда фамилия транскрипируется как Цагир⁶) сообщил Ю.И. Манину [10; первый абзац на с. 3] следующую асимптотику величины (20):

$$[e \cdot (e - 2)]^{-1/2} \cdot \left[\frac{n}{e \cdot (e - 2)} \right]^{n-1},$$

которая приведена без доказательства в последующей монографии Манина [11; разд. 4.2.2, с.224]⁷.

Проще всего эта асимптотика извлекается из (1) при помощи теоремы Эдварда Бендера [12; теорема 5 на с. 291] (скорее всего, этим путём Дон Загир и следовал).

Положим в терминологии указанной статьи Бендера и в соответствии с нашим определяющим соотношением (1):

$$F(z, x) \equiv z - f(x) \equiv z - [2x - (1 + x) \cdot \ln(1 + x)] = 0, \quad (1')$$

где под символом \ln как и выше понимается главная ветвь логарифмической зависимости.

Трактуя из этого соотношения $x = x(z)$ как неявно заданную функцию переменной z и дифференцируя по z , имеем:

$$1 - [2 - \ln(1 + x) - 1] \cdot x'_z = 0,$$

откуда

⁶ См., например, статью этого замечательного математика в сборнике «Живые числа. Пять экскурсий» (авторы: В. Боро, Д. Цагир, Ю. Рольфс, Х. Крафт, Е. Янцен) / Пер. с нем Е.Б. Гладковой с предисловием Ф. Хирцебруха, М.: «Мир», 1985; статья Д. Загира (Цагира) под заглавием «Первые 50 миллионов простых чисел» помещена на с. 42 – 71. См. также недавно вышедшую книгу: Френкель Э. «Любовь и математика. Сердце скрытой реальности» / Пер. с англ. Е. Шикаревой. – СПб.: Питер, 2016, где см. стр. 88 – 89; примечание 6 на стр. 316 – 317.

⁷ Без упоминания имени Загира.

$$x'_z = \frac{1}{1 - \ln(1+x)} \Bigg|_{x=x(z)}$$

и особенность неявно заданной функции $x = x(z)$ совпадает с нулём знаменателя, доставляющим обращающуюся в бесконечность производную, а именно $x'_z = x'_z(z)$.

Имеем, стало быть,

$$\ln(1+x) = 1,$$

потенцируя (трактруя как показатели экспоненты), получим

$$x = e - 1,$$

$$\text{откуда, согласно (1')} \text{ и поскольку } \ln(1+x) \Bigg|_{x=e-1} = \ln e = 1,$$

$$z \Bigg|_{x=e-1} = [2x - (1+x)] \Bigg|_{x=e-1} = x - 1 \Bigg|_{e-1} = e - 2.$$

Последняя величина, согласно указанной теореме Э. Бендера и есть радиус сходимости неявно заданной посредством (1') функции $x = x(z)$.

Отметим, что проверка условия (4) теоремы Бендера не вызывает в нашем случае каких-либо затруднений.

Дальнейшие выкладки и вычисления носят рутинный характер, но мы приведём их полностью:

$$F_z \equiv 1; F_{xx} = -[1 - \ln(1+x)]_x = \frac{1}{1+x}$$

и при $x = e - 1$ (как выше) имеем:

$$F_{xx} \Bigg|_{x=e-1} = \frac{1}{1+x} \Bigg|_{x=e-1} = e^{-1},$$

откуда величина (20) (мы можем обозначить её посредством a_n), делённая на $n!$, оказывается асимптотически равной в силу теоремы Бендера:

$$\frac{a_n}{n!} \approx \left(\frac{(e-2) \cdot F_z}{2\pi \cdot F_{xx} \Big|_{x=e-1}} \right)^{1/2} \cdot n^{-3/2} \cdot (e-2)^{-n},$$

или, согласно общеизвестной асимптотике $n!$ по Стирлингу (например, формула (3.1) на стр.270 той же статьи Бендера),

$$\begin{aligned} a_n &\approx \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \left(\frac{e-2}{2\pi \cdot e^{-1}} \right)^{1/2} \cdot n^{-3/2} \cdot (e-2)^{-n} = \\ &= n^{n+1/2-3/2} \cdot e^{-n+1/2} \cdot (e-2)^{1/2-n} = \\ &= \frac{n^{n-1}}{[e \cdot (e-2)]^{n-1}} \cdot [e \cdot (e-2)]^{-1/2}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

В. Впоследствии иным путём эта асимптотика была выведена госпожой Маргарет Ридди (Margaret Readdy) из университета штата Кентукки в Лексингтоне [13; theorem 3.6; p. 586].

Вывод Ридди не опирается на теорему Э. Бендера и более сложен, однако рекуррентность в [13; formula (3.1), p. 583, proposition 3.1], берущая начало в предшествующей работе Шона Кила (Sean Keel) в [14; p. 550; (4)], позволяет быстро установить выполнимость условия (4') в теореме Бендера (при этом начальные условия, как нам представляется, надо увеличить в нотации Ридди до $\sigma_0 = 1; \sigma_1 = 2, \overset{def}{\sigma_n} = a_{n+2}; n \geq 0$ в наших обозначениях).

С. В более ранней по хронологии работе 3-х авторов, а именно, в [15; p.3, theog. 1.1, формула (6)] соотношение, аналогичное указанному соотношению (3.1) из работы Ридди, представлено со сдвигом индекса на 2 влево в виде:

$$m_1 = 1; m_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot m_i \cdot m_{n-i} - (n-2) \cdot m_{n-1}; n \geq 2^8$$

Действительно, отделяя в сумме из правой части последнее и первое слагаемые, получим:

$$m_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} \binom{n-1}{i} \cdot m_i \cdot m_{n-i} + \binom{n-1}{1} \cdot m_{n-1} - (n-2) \cdot m_{n-1} = 2 \cdot m_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} \binom{n-1}{i} \cdot m_i \cdot m_{n-i}$$

в силу начальных данных $m_1 = 1$.⁹

Кроме того, можно заметить, что в произведении мономов, стоящих под знаком суммы в последнем выражении индексы совпадают в двух случаях:

а) при $i := i$, и соответствующий моном есть $\binom{n-1}{i} \cdot m_i \cdot m_{n-i}$;

б) при $i := n-i$, а соответствующий моном оказывается равным $\binom{n-1}{(n-1)-(i-1)} \cdot m_{[(n-1)-(i-1)]} \cdot m_{n-[(n-1)-(i-1)]} = \binom{n-1}{i-1} \cdot m_{n-i} \cdot m_i$

по правилу дополнения нижнего индекса до верхнего в биномиальных коэффициентах.

Пробегаая суммирование дважды, причём от разных концов (верхнего и нижнего пределов суммирования соответственно) и приводя подобные мономы, поскольку согласно основной рекуррентности для паскалевой двухиндексной последовательности биномиальных коэффициентов имеет место:

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}; n \geq i \geq 1,$$

⁸ Мы намеренно для облегчения сравнения не меняем обозначения из [15]. Разумеется, в нашей терминологии m_n есть просто a_n .

⁹ Сама рекуррентность в такой записи начинает работать лишь при $n \geq 4$, посему одного задания значения $m_1 = 1$ явно недостаточно.

мы получаем эквивалент формулы (3.1) из указанной нами работы Ридди, восходящей к первоначальной формуле Шона Кила.

Необходимо особо отметить случай

с) совпадения индексов перемножаемых мономов, когда, допустим, при $i := k$ мы имеем равенство $k = n - k$, т.е. $k = \frac{n}{2}$ при чётном $n = 2k$. В этом случае имеем:

$$\frac{1}{2} \cdot \binom{2k}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} = \frac{(2k-1)! \cdot 2k}{2 \cdot k! \cdot (k-1)! \cdot k} = \binom{2k-1}{k} = \binom{2k-1}{k-1}.$$

И в этом случае результат удвоения суммы после суммирования «с противоположных концов» с последующим делением удвоенной суммы пополам *так же сохраняет свою достоверность*.

В заключение раздела укажем, что задача о параметрическом развитии идущей от Шона Кила рекуррентности, берущая своё начало по-видимому, в [11; разд. 4.3.2 на с. 227, формула (4.25)], естественно привела авторов [15; р.6, Conjecture 1] к вопросу о лакунарных лорановских полиномах специального вида, ответ на который был получен в [16].

10. Благодарности. Автор выражает благодарность С.К. Ландо за постановку задачи обращения степенного ряда, данного соотношением (1), а также Ю.Н. Торхову за весьма значительную информационную поддержку. Своевременной присылкой распечатки первоначального, выложенного в ArXiv'e, варианта [16] автор настоящего текста обязан В.А. Лисковцу (Минск, институт математики НАН Беларуси). Наконец, В.С.Шевелёв (Израиль, университет Бен-Гуриона в Беэр-Шева) прислал автору распечатку электронной публикации [15] в «доинтернетское» и тем самым весьма трудное для автора время.

11. Ниже приводится таблица первых 7-ми значений величины (20), начиная со значения $n = 1$ вплоть до значения $n = 7$.¹⁰

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_n =$	1	1	2	7	34	213	1630			

Табл.1.

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \sum_{q=0}^k (-2)^{k-q} \cdot \frac{[(n-1)+(k-q)+q]!}{[(n-1)+(k-q)]!} \times \sum_{l=q}^{n-1} \binom{(n-1)+(k-q)}{l} \cdot S(l+1, q+1) \cdot S_2(n-1-l+(k-q), k-q) \quad (21)$$

Литература

1. *Lando S.K., Zvonkin A.K.* Embedded Graphs // Preprint Max-Planck-Institut fur Mathematik, 63 (2001, July 27) 230p.
2. *Звонкин А.К., Ландо С.К.* Графы на поверхностях и их приложения. – М.: МЦНМО, 2010. – 480с.
3. *Гурвиц Адольф.* Теория аналитических и эллиптических функций / Пер с нем. Ю.В. Икорникова под ред Н.Е. Кочина. М. – Л.: ГТТИ, 1933. 344с.
4. *Риордан Джон.* Введение в комбинаторный анализ / Пер. с англ. Л.Е. Садовского под ред. Л.Я. Куликова. М.: ИЛ, 1963. 287с.
5. *Comtet L.* Analyse combinatoire, t. II. Paris : Presse Universitaire de France, 1970. 190 pp.
6. *Коганов Л.М.* Псевдопорождаемые двухиндексные последовательности. М.: Недра, 1989. 86с.

¹⁰ В [15] было ошибочно указано без согласования с автором настоящего текста, что члены второй строки таблицы были установлены вплоть до $n = 10$ включительно, что до сих пор не соответствует действительности.

Автор оставляет за собой право продолжить ручной просчёт оставшихся величин, используя для этой цели вышеуказанные проверенные автором таблицы и применяя итоговую резко упрощающую необходимые операции формулу (21), расположенную после таблицы со специально незаполненными последними тремя столбцами.

7. *Васильев Н.Б., Коганов Л.М.* Разбиения, ГС-перестановки и деревья. // В кн.: Васильев Н.Б. Статьи из журнала «Квант». Часть 2. М.: Издательство МЦНМО, 2013 (Библиотечка «Квант». Вып. 126). С. 140 – 148.

8. *Воблый В.А.* Асимптотическое перечисление помеченных связных разреженных графов с заданным числом висячих вершин // В сб. «Методы дискретного анализа в теории графов и схем». Сборник трудов института математики СО АН СССР, 1985. Выпуск 42, с.3 – 16.

9. *Коганов Л.М.* Обращение одного степенного ряда и задача С.К. Ландо // В сб. «Дискретные модели в теории управляющих систем. VII Международная конференция: Москва, 7 – 11 декабря 2004 г. Труды» / Ред. кол. В.Б. Алексеев, В.А. Захаров, Д.С. Романов. М.: Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004. С.170 – 172.

10. *Manin Yu. I.* Generating functions in algebraic geometry and sums over trees //arXiv:alg-geom/9407005v2 19 Jul 1994. 14p.

11. *Манин Ю.И.* Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей / Пер. с англ. под ред. С.К. Ландо под ред. С.М. Натансона. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002. 344с.

12. *Бендер Э.А.* Асимптотические методы в теории перечислений / В сб.переводов «Перечислительные задачи комбинаторного анализа» под ред. Г.П. Гаврилова (сер. «Библиотека кибернетического сборника»); пер. с англ. А.И. Павлова. М: Издательство «Мир»,1979. С.266 – 310.

13. *Readdy Margaret A.* Enumerative and asymptotic analysis of a moduli space // Advances in Applied Mathematics. 2011. V. 47. P.575 – 588.

14. *Keel Sean* Intersection of moduli space of stable N -pointed curves of genus zero // Transactions of the American Mathematical Society. 1992. V. 330. no 2. P. 545 – 574.

15. *Goulden I.P., Litsyn S., Shevelev V.* On a Sequence Arising in Algebraic Geometry // Journal of Integer Sequences. 2005. V.8. Article 05.4.7. 9p.

16. *Drake B., Gessel I.M., Xin Guoce* Three proofs of the Goulden-Litsyn-Shevelev conjecture on a sequence arising in algebraic geometry // *Journal of Integer Sequences*. 2007. V. 10. Article 07.3.7. 10p.